



T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



RASTGELE EFEKTLİ FREDHOLM ve VOLTERRA İNTEGRAL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜM DAVRANIŞLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Özge ALTAY BOYACI

ŞUBAT 2021
GÜMÜŞHANE

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

RASTGELE EFEKTLİ FREDHOLM ve VOLTERRA İNTEGRAL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜM DAVRANIŞLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Özge ALTAY BOYACI

Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

“Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı”

Yüksek Lisans Programında kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih :17.02.2021

Tezin Sözlü Savunma Tarih :08.03.2021

ŞUBAT 2021

TEZ BEYANNAMESİ

Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlamış olduğum **“RASTGELE EFEKTLİ FREDHOLM ve VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜM DAVRANIŞLARI”** isimli tez çalışmasında; bütün bilgi ve belgeleri genel akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, görsel ve yazılı bütün bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak hazırlayıp sunduğumu, başka kaynaklardan yararlandığım bilgileri metin ve kaynaklarda eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma süresince bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksi durumda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. .../.../20..

Özge ALTAY BOYACI

ÖZET
YÜKSEK LİSANS TEZİ

RASTGELE EFEKTLİ FREDHOLM ve VOLTERRA İNTEGRAL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜM DAVRANIŞLARI

Özge ALTAY BOYACI

Gümüşhane Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mehmet MERDAN

2021,87 sayfa

Bu çalışmada, Fredholm, Volterra ve Volterra-İntegro integral denklemlerinin katsayıları ve başlangıç koşulları rastgele değişken seçilerek denklemler rastgele hale getirilmiştir. Bu denklemlerin çözümleri için yarı analitik yöntemlerden diferansiyel, Elzaki, Laplace ve Sumudu dönüşüm, varyasyonel iterasyon yöntemlerinin yanı sıra direkt ve seri çözüm yöntemleri de kullanılmıştır. Ayrıca, elde edilen rastgele Fredholm, Volterra ve Volterra-İntegro integral denklemlerin çözümleri bulunarak, çözümlerin olasılık karakteristikleri incelenmiştir. Parametreler farklı olasılık dağılımlarından seçilerek, örneğin Beta, Gamma, Üçgensel, Üstel, Düzgün, Normal dağılım olması

durumunda çözümlerin beklenen değer ve varyansları hesaplanarak, grafiksel olarak gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Beklenen Değer, Fredholm, Rastgele Değişken, Rastgele İntegral Denklem, Varyans, Volterra ve Volterra-İntegro İntegral Denklemler.

ABSTRACT
MS THESIS

**BEHAVIOUR of SOLUTION FREDHOLM and VOLTERRA INTEGRAL
EQUATIONS With RANDOM EFFECTS**

Özge ALTAY BOYACI

Gümüşhane University

The Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematical Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet MERDAN

2021, 87 pages

In this study, the coefficients and initial conditions of Fredholm, Volterra and Volterra-Integro integral equations were randomized by selecting random variables. For the solutions of these equations, the semi-analytical methods such as differential, Elzaki, Laplace and Sumudu transform, variational iteration methods as well as direct and serial solution methods were used. In addition, the solutions of the random Fredholm, Volterra and Volterra-Integro integral equations were found and the probability characteristics of

the solutions were examined. Parameters are selected from different probability distributions, for example, in case of Beta, Gamma, Triangular, Exponential, Uniform, Normal distribution, the expected values and variances of the solutions are calculated and shown graphically.

Keywords: Expected value, Fredholm, Random Variable, Random Integral Equation, Variance, Volterra and Volterra-Integro integral equations

TEŞEKKÜR

Bu çalışma, Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıştır. Tez konusunun belirlenmesinde bana yardımcı olan bu çalışmanın yürütülmesinde değerli bilgilerini benimle paylaşan, kıymetli zamanını bana ayırıp desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, edindiği tecrübe ile bana büyük katkısı olan değerli danışmanım Prof. Dr. Mehmet MERDAN ve emeği geçen tüm hocalarıma en içten teşekkürlerimi sunarım. Yüksek Lisans öğrenimi boyunca, maddi ve manevi anlamda bana desteklerini esirgemeyen aileme ve eşime sonsuz teşekkür ederim.

Özge ALTAY BOYACI

Gümüşhane, 2021

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

| | |
|--|------|
| ÖZET | IV |
| ABSTRACT | VI |
| TEŞEKKÜR | VIII |
| ŞEKİLLER DİZİNİ | XI |
| TABLolar DİZİNİ..... | XIII |
| SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ..... | XIV |
| 1.GENEL BİLGİLER..... | 1 |
| 1.1. GİRİŞ..... | 1 |
| 1.2 İntegral Denklemlerin Özellikleri ve Sınıflandırılması | 2 |
| 1.3 İntegral Denklemlerin Genel Özellikleri | 2 |
| 1.4 İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması..... | 3 |
| 1.4.1 Lineerliğine Göre Sınıflandırma..... | 3 |
| 1.4.2. Tekilliliğine Göre Sınıflandırma..... | 4 |
| 1.4.3. Homojenliğine Göre Sınıflandırma | 4 |
| 1.4.4. Yapılarına Göre Sınıflandırma | 5 |
| 1.4.5. İntegral Sınırlarına Göre Sınıflandırma..... | 6 |
| 1.5. İntegro Diferansiyel Denklemler | 8 |
| 1.6. İki Boyutlu İntegral Denklemler | 8 |
| 1.7. İntegral Denklem Sistemleri..... | 9 |
| 1.8. Literatür özeti | 10 |
| 1.9. Olasılık Teorisi ile İlgili Temel Kavramlar | 11 |
| 1.9.1. Olasılığın Klasik Tanımı | 11 |
| 1.9.2. Beklenen Değerin Tanımı..... | 11 |
| 1.9.3. Moment Çıkaran Fonksiyonlar | 12 |
| 1.9.4. Dağılım Fonksiyonu | 12 |
| 1.9.5. Varyans..... | 13 |
| 1.10. Bazı Olasılık Dağılımları..... | 13 |
| 1.10.1. Normal Dağılımın Özellikleri..... | 13 |
| 1.10.2. Düzgün Dağılımın Özellikleri | 14 |

| | | |
|---------|---|----|
| 1.10.3. | Gamma Dağılımının Özellikleri | 14 |
| 1.10.4. | Geometrik Dağılımın Özellikleri | 14 |
| 1.10.5. | Standart Beta Dağılımı Özellikleri | 15 |
| 1.10.6. | Üçgensel Dağılım | 16 |
| 1.10.7. | Üstel Dağılım..... | 16 |
| 2. | YAPILAN ÇALIŞMALAR..... | 18 |
| 2.1. | Rastgele Diferansiyel Dönüşüm Metodunun İntegral Denklemlere Uygulanması | 18 |
| 2.1.1. | Rastgele Diferansiyel Dönüşüm Metodu Yöntemi..... | 18 |
| 2.1.2. | Rastgele Volterra İntegral Denkleminin Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile Çözümü | 19 |
| 2.1.3. | Rastgele Volterra - İntegro Diferansiyel Denkleminin Çözümünde DDY Kullanımı..... | 27 |
| 3. | RASTGELE İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE KULLANILAN BAZI FARKLI YÖNTEMLER | 32 |
| 3.1. | Rastgele Varyasyon İterasyon Yöntemi | 32 |
| 3.2. | Rastgele Sumudu Dönüşüm Yöntemi | 42 |
| 3.3. | Rastgele Elzaki Dönüşüm Yöntemi..... | 51 |
| 3.4. | Lineer Diferansiyel Denklemler ile Volterra İntegral Denklemleri Arasındaki İlişki..... | 60 |
| 3.5. | Laplace Dönüşüm Metodu ile Rastgele Volterra İntegral Denkleminin Çözüm Davranışı | 62 |
| 3.6. | Direk Hesaplama Metodu | 70 |
| 3.7. | Seri Çözüm Metodu..... | 75 |
| 4. | BULGULAR | 81 |
| 5. | İRDELEME | 82 |
| 6. | SONUÇLAR..... | 83 |
| 6. | ÖNERİLER | 84 |
| 7. | KAYNAKLAR..... | 85 |
| | ÖZGEÇMİŞ..... | 88 |

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

| | |
|--|----|
| Şekil 2. 1. Rastgele DDY'den elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri..... | 22 |
| Şekil 2. 2. Rastgele DDY'den elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri..... | 24 |
| Şekil 2. 3. Rastgele DDY'den elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri..... | 26 |
| Şekil 2. 4. Rastgele DDY'den elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri..... | 29 |
| Şekil 2. 5. Rastgele DDY'den elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri..... | 31 |
| Şekil 3. 1. Rastgele VİM ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri..... | 35 |
| Şekil 3. 2. Rastgele VİM ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikler..... | 37 |
| Şekil 3. 3. Lineer iterasyon yönteminden elde edilen çözümün beklenen değeri ve varyansı | 39 |
| Şekil 3. 4. Rastgele VİM ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri..... | 41 |
| Şekil 3. 5. Rastgele sumudu dönüşümü ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri | 45 |
| Şekil 3. 6. Rastgele sumudu dönüşümü ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri | 47 |
| Şekil 3. 7. Rastgele sumudu dönüşümü ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri | 49 |
| Şekil 3. 8. Rastgele sumudu dönüşümü ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri | 51 |
| Şekil 3. 9. Rastgele Elzaki dönüşüm yöntemi ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri | 55 |
| Şekil 3. 10. Rastgele Elzaki dönüşüm yöntemi ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri | 56 |
| Şekil 3. 11. Rastgele Elzaki dönüşüm yöntemi ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri | 58 |
| Şekil 3. 12. Rastgele Elzaki dönüşüm yöntemi ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri | 60 |
| Şekil 3. 13. Rastgele laplace dönüşüm yöntemi ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri | 64 |
| Şekil 3. 14. Rastgele laplace dönüşüm yöntemi ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri | 66 |

| | |
|--|----|
| Şekil 3. 15. Rastgele laplace dönüşüm yöntemi ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri..... | 68 |
| Şekil 3. 16. Rastgele laplace dönüşüm yöntemi ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri..... | 70 |
| Şekil 3. 17. Direkt hesaplama yöntemi ile elde edilen çözümlerin beklenen değer ve varyans grafikleri | 73 |
| Şekil 3. 18. Direkt hesaplama yöntemi ile elde edilen çözümlerin beklenen değer ve varyans grafikleri | 75 |
| Şekil 3. 19. Seri çözüm metodu yöntemi ile elde edilen çözümlerin beklenen değer ve varyans grafikleri | 77 |
| Şekil 3. 20. Seri çözüm metodu yöntemi ile elde edilen çözümlerin beklenen değer ve varyans grafikleri | 80 |

TABLÖLAR DİZİNİ

Sayfa No

| | |
|---|----|
| Tablo 1.1. Sumudu Tablosu Dönüşüm | 43 |
|---|----|

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$E(Y)$: Y rastgele değişkeninin beklenen değeri

$Var(y)$: Y rastgele değişkeninin varyansı

DDY : Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

SDY : Sumudu Dönüşüm Yöntemi

VİM : Varyasyonel İterasyon Metodu

EDY : Elzaki Dönüşüm Yöntemi

LDY : Laplace Dönüşüm Yöntemi

DHM : Direk Hesaplama Metodu

SÇM : Seri Çözüm Metodu

1.GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

İntegral denklemler bilinmeyen fonksiyonların integral işareti altında işleme alınan denklemlerdir. İntegral denklemleri anlatmak için sadece bu tanım yeterli değildir. İntegral denklemlerin bütün türlerini kapsayacak teoriyi kurmak mümkün olmayabilir. Bu nedenle birbirinden farklı integral denklemleri ayrı ayrı incelemek gereklidir. Böylece integral denklemler için geniş bir araştırma sahası açılmış olur.

İntegral denklemlerle ilgili çalışmalar 19. yüzyılda başlamıştır. Başlangıçta dağınık ve rastgele araştırmalar yapılmıştır. Daha sonraları daha sistematik ve düzenli çalışmalar yapıp sonuçlar alınmaya başlanmıştır. İlk olarak 1823 yılında Abel'in mekanik problemlerini incelediği sıralarda integral denklemlere rastladığı bilinmekle birlikte integral denklem deyimi Du Bois Reymond'un 1888'de yayınladığı makalesinde kullanıldığı anlaşılmaktadır (Bocher, 1913). İntegral denklemlerle ilgili Tricomi (1955), Petrovsky (1953) ve Lovitt (1924)'e ait kaynaklarda mevcuttur. İntegral sınırlarından birinin değişken olan doğrusal integral denklemlerle ilgili çalışmalar İtalyan matematikçi Vito Volterra (1860-1940) tarafından yayımlanmıştır. Fredholm de Volterra' nın 1884 yılında sunduğu benzer yaklaşım problemlerini incelemiş ve 1903' te bu konuda makalesini yayınlamıştır.

İntegral denklemler evrensel denklemlerdir ve integral denklemler çözülmesi zor denklemlerdir. Diferansiyel denklemler bazı problemleri çözmekte tek başlarına yeterli değildir. Bu sebeple diferansiyel denklemlere sınır şartlarının da eklenmesi gerekir. İntegral denklemler ise bir problemin tam tanımını verdiği için dolayı eklenmesi gereken şartlara gerek kalmaz. Temelde benzer olduklarından diferansiyel denklemler integral denklemler olarak da ifade edilebilir.

İntegral denklemler matematik ve fizik başta olmak üzere birçok dalda kullanılmaktadır. Diferansiyel denklemlerin çözümünde de integral denklemler kullanılmaktadır. İntegral denklemler konusu diferansiyel denklemler, operatörler teorisi gibi matematik konularıyla iç içe incelenmektedir. Fizik ve matematikteki bir çok denklem adi ve kısmi diferansiyel denklem olarak ifade edilebilir. Ayrıca matematiksel fizik ve uygulamalı matematikte birçok alanda integral denklemler rol oynamaktadır. İntegral

denklemler incelenirken lineer cebir ve fonksiyonel analiz konularından da faydalanılmaktadır. Örneğin lineer integral denklemlerin konusu içerisinde görülen öz vektör, öz fonksiyon ve vektör uzayları kavramları aynı zamanda lineer cebirin de temel kavramlarındandır. İntegral denklemlere çeşitli şekillerde rastlamak mümkündür. Bu çeşitlilik integral denklemlerin genel bir çözümünün bulunmasını zorlaştırmaktadır. Bu nedenle araştırmalar her bir integral denklem için ayrı ayrı çözüm yöntemleri geliştirmesi şeklinde yürütülmektedir.

Bu tez çalışmasının amacı volterra, fredholm ve volterra-integro integral denklemlerinin katsayılarını veya başlangıç koşullarını rastgele seçerek, rastgele volterra, fredholm ve volterra-integro integral denklemlerini elde etmek ve elde edilen denklemlerin farklı yöntemlerle çözümlerini bularak beklenen değer ve varyans gibi olasılık karakteristiklerini elde ederek çözüm davranışlarını grafiksel olarak gözlemlemektir. Bu çalışmada rastgele volterra, fredholm ve volterra-integro integral denklemlerinin çözümler bulunurken Diferansiyel Dönüşüm Metodu, Varyasyonel İterasyon Metodu, Sumudu ve Elzaki Dönüşüm Metodu, Laplace Dönüşüm Metodu, Direkt Hesaplama Metodu ve Seri Çözüm yöntemleri kullanılmıştır.

1.2. İntegral Denklemlerin Özellikleri ve Sınıflandırılması

İntegral denklemler uygulamalı matematikte önemli bir yer kaplar. Bu tez çalışmasında integral denklemlerin kısaca sınıflandırılmaları verildikten sonra bazı integral türleri incelenmiş, integral denkleminde bazı katsayılar rastgele değişken seçilerek elde edilen integral denklemlerinin olasılık karakteristikleri incelenmiş ve bu integral denklemlerin çözümleri ile ilgili bazı yöntemlere yer verilmiştir. Özellikle günümüzde bir çok alanda kullanılan volterra ve fredholm integral denklemlerin genel tanımları ve çözüm yöntemleri verilmiştir. Bu tezde rastgele integral denklemler üzerinde çalışılmış ve farklı olasılık dağılımlarından seçilen rastgele değişkenler için elde edilen çözümlerin beklenen değer ve varyansı bulunarak çözümler grafiklerle gösterilmiştir.

1.3. İntegral Denklemlerin Genel Özellikleri

Bilinmeyen fonksiyonun integral altındaki denklemlere integral denklemleri denir. Bu tip denklemlerin genel gösterimi aşağıda verilmiştir.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt \quad (1.1)$$

Burada $u(x)$ bilinmeyen $K(x, t)$ ve $f(x)$ bilinmeyen fonksiyonlardır. x ve t reel değişkenler olup (a, b) aralığında değerler almaktadır. λ ise sayısal bir parametredir.

1.4. İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması

İntegral denklemler lineerliğe, tekillığe, bilinmeyen fonksiyonun bulunduğu yere, homojenliğe ve sınırlarına göre sınıflandırılır.

1.4.1. Lineerliğine Göre Sınıflandırma

İntegral denklemleri lineerliğe göre sınıflandırırken $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonunun lineerliği temel alınır. Bu sınıflandırmada integral denklemler lineer olan ve lineer olmayan integral denklemler olmak üzere iki grupta incelenir.

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)u(t)dt \quad (1.2)$$

ifadesine integral denklem denir. Burada $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonunun lineer olması halinde ,integral denklem integral lineer denklem adını alır.

$$u^n(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)u(t)dt \quad (1.3)$$

integral denkleminde ise $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonunun n.kuvveti bulunduğundan, lineer olmayan bir integral denklem olmaktadır. Daha genel olarak,

$$u^n(x) = f(x) + \int_a^x \Phi[x, t, u(t)]dt \quad (1.4)$$

denklemini de lineer olmayan integral denklem olmaktadır.

1.4.2. Tekilliliğine Göre Sınıflandırma

İntegral denklemlerin sınıflandırılmasında $K(x, t)$ fonksiyonun sürekliliği önemlidir. İntegral işareti altında bulunan $K(x, t)$ fonksiyonuna çekirdek fonksiyonu denir.

Tekil İntegral Denklemler

İntegral denklemin sınır aralıklarında $K(x, t)$ çekirdek fonksiyonu süreksiz olan veya integral sınırlarından en az biri sonsuz olan,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) u dt \quad (1.5)$$

yapısındaki integral denklemlere tekil integral denklemler denir.

Tekil Olmayan İntegral Denklemler

İntegral denklemin sınır aralıklarında $K(x, t)$ çekirdek fonksiyonu sürekli olan ve integral sınırları sonsuz olmayan integral denklemlere tekil olmayan integral denklemler denir.

1.4.3. Homojenliğine Göre Sınıflandırma

Bu sınıflandırmaya göre integral denklemler homojen olan ve homojen olmayan integral denklemler olmak üzere iki grupta incelenir. İntegral denklem bilinmeyen $U(x)$ fonksiyonuna göre homojen olup olmadığı açısından sınıflandırılır.

$$U(x) = \int_a^b K(x, t) U(t) dt \quad (1.6)$$

homojen integral denklem olarak adlandırılır. Bununla beraber;

$$U(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) U(t) dt \quad (1.7)$$

denklemini homojen olmayan integral denklemdir. Burada $f(x)$ homojenliği bozmaktadır.

$$U(x) = \int_a^b K(x, t) U(t) dt \quad (1.8)$$

Homojen integral denkleminde $U(x) = 0$ için bir çözüm vardır. Bu çözüme aşık çözüm denir.

1.4.4. Yapılarına Göre Sınıflandırma

Yapılarına göre integral denklemler 3 şekilde incelenir.

1.Tür: Eğer bilinmeyen fonksiyon sadece integral içinde bulunuyorsa bu tip denklemlere 1. Tür integral denklem denir. Örnek olarak

$$x^2 = \int_0^1 (x - t) U(t) dt \quad (1.9)$$

denklemini verilebilir.

2.Tür: Bilinmeyen fonksiyon integralin hem içinde hem dışında bulunuyorsa bu tip integral denkleme 2. Tür integral denklemin denir. Örnek olarak;

$$U(x) = \int_a^b K(x, t) U(t) dt \quad (1.10)$$

veya

$$U(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) U(t) dt \quad (1.11)$$

3.Tür: $\varphi(x)$, $f(x)$ ve $K(x, t)$ fonksiyonları bilindiğinde

$$\varphi(x) U(x) = \int_a^b K(x, t) U(t) dt \quad (1.12)$$

Şeklindeki integral denklemdir. 1. ve 2. Tür integral denklemler 3. Tür integral denklemin $\varphi(x) = 0$ ve $\varphi(x) = 1$ durumları için özel halleridir.

1.4.5. İntegral Sınırlarına Göre Sınıflandırma

İntegral denklemlerin bir sınıflandırılması da integral denklemin sınırlarının değişken veya sabitlerden oluşmasına göre yapılmaktadır. Sınırları değişken olan integral denklemlere Volterra İntegral denklemi denir.

$$\varphi(x) = \int_a^x K(x, t) U(t) dt \quad (1.13)$$

$$U(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t) U(t) dt \quad (1.14)$$

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) U(t) dt \quad (1.15)$$

Şeklindeki integral denklemler volterra integral denklemlerdir. Eğer integral denklemin sınırı

$x = b$ şeklinde sınır sabit sayı ise bu integral denklem fredholm integral denklemi olarak adlandırılır.

$$U(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) U(t) dt \quad (1.16)$$

$$\varphi(x)U(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) U(t) dt \quad (1.17)$$

Fredholm integral denklemine örnektir. Şimdi de Fredholm integral denklemlerini inceleyelim.

Fredholm İntegral Denklemleri

a, b ve λ sabit sayılar olmak üzere

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t) dt \quad (1.18)$$

Denklemine fredholm integral denkleminin standart formu denir. Eğer $\varphi(x) = 0$ alınır

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt = 0 \quad (1.19)$$

denklemleri elde edilir. Elde edilen bu denklemler 1.türden fredholm integral denklemleri denir. $\varphi(x) = 1$ alınır

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (1.20)$$

denklemleri elde edilir. Elde edilen bu denklemler 2. Türden fredholm integral denklemleri denir (Wazwaz, 1999).

Şimdi de Volterra integral denklemini ele alalım.

Volterra İntegral Denklemleri

λ sayısal bir parametre $f(x)$ ve $K(x,t)$ bilinen fonksiyonlar ve $U(t)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$\varphi(x)U(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt \quad (1.21)$$

denklemine volterra integral denkleminin en genel hali denir. Volterra integral denkleminin fredholm integral denkleminden tek farkı üst sınırının değişken olmasıdır (Aksoy, 1983).

1) $\varphi(x) = 0$ alınır

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)U(t)dt = 0 \quad (1.22)$$

denklemleri elde edilir. Buna 1.tip volterra integral denklemleri denir.

2) $\varphi(x) = 1$ alınır

$$U(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)U(t)dt \quad (1.23)$$

denklemleri elde edilir. Buna 2.tip volterra integral denklemleri denir.

1.5. İntegro Diferansiyel Denklemler

İçinde bilinmeyen fonksiyonun türevlerinin bulunduğu integral denklemler integro-diferansiyel denklemlerdir. İntegro-diferansiyel denklemlerin özel çözümlerinde verilen başlangıç şartları göz önüne alınır.

Bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonunun türevlerinin bulunduğu integral denklemlere integro-diferansiyel denklem denir.

$$U'(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)U(t)dt \quad (1.24)$$

Bilinmeyen fonksiyonun n.mertebeden türevinin bulunduğu,

$$U^n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)U(t)dt \quad (1.25)$$

Fredholm-integro diferansiyel denklemdir.

$$U^n(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)U(t)dt \quad (1.26)$$

Volterra-integro diferansiyel denklemdir.

1.6. İki Boyutlu İntegral Denklemler

$u(x, t)$ bilinmeyen fonksiyonun iki katlı integralin içinde bulunduğu integral denklemler iki boyutlu integral denklemlerdir.

İki boyutlu Fredholm integral denklemleri,

$$U(x, t) = f(x, t) + \int_c^d \int_a^x K(x, t, y, z)U(y, z)dydzx \in [a, b], t \in [c, d] \quad (1.27)$$

Yapısına; iki boyutlu volterra integral denklemler ise,

$$U(x, t) = f(x, t) + \int_0^t \int_0^x K(x, t, y, z)U(y, z)dydzx \in [a, b], t \in [c, d] \quad (1.28)$$

yapısına sahiptir. Bu integral denklemlerdeki $K(x, t, y, z)$ çekirdek fonksiyonlar, $f(x, t)$ bilinen fonksiyonlar ve $u(x, t)$ bilinmeyen fonksiyonlardır.

1.7. İntegral Denklem Sistemleri

İntegral denklem sistemleri, birden fazla integral denklemin bir arada ele alındığı sistemlerdir. İntegral denklem sistemlerinin analitik çözümlerine ulaşmak genellikle zordur. Bundan dolayı çoğu zaman yaklaşık çözümleri bulunur. n bilinmeyenli n tane denklemden oluşan lineer Fredholm integral denklem sistemi;

$$\begin{aligned} a_{11}(x)u_1(x) + a_{12}(x)u_2(x) + \cdots + a_{1n}(x)u_n(x) \\ = f_1(x) + \int_a^b \{k_{11}(x,t)u_1(t) + k_{12}(x,t)u_2(t) + \cdots + k_{1n}(x,t)u_n(t)\}dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{21}(x)u_1(x) + a_{22}(x)u_2(x) + \cdots + a_{2n}(x)u_n(x) \\ = f_2(x) + \int_a^b \{k_{21}(x,t)u_1(t) + k_{22}(x,t)u_2(t) + \cdots + k_{2n}(x,t)u_n(t)\}dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{31}(x)u_1(x) + a_{32}(x)u_2(x) + \cdots + a_{3n}(x)u_n(x) \\ = f_3(x) + \int_a^b \{k_{31}(x,t)u_1(t) + k_{32}(x,t)u_2(t) + \cdots + k_{3n}(x,t)u_n(t)\}dt \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned} a_{n1}(x)u_1(x) + a_{n2}(x)u_2(x) + \cdots + a_{nn}(x)u_n(x) \\ = f_n(x) + \int_a^b \{k_{n1}(x,t)u_1(t) + k_{n2}(x,t)u_2(t) + \cdots + k_{nn}(x,t)u_n(t)\}dt \end{aligned}$$

şeklinde dir.

1.8. Literatür Özeti

İntegral sınırlarından biri x gibi bir değişken olan ve bilinmeyen φ fonksiyonunun integralin hem içinde hem de dışında bulunduğu

$$\varphi(y) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(y) dy$$

integral denklemi ilk olarak Poisson tarafından elde edilmiştir. Burada φ çözümü λ 'nın kuvvetleri cinsinden verilmiştir. Ancak ilgili serinin yakınsaklığı Poisson tarafından gösterilmeyip 1830 yılında Liouville tarafından ispatlanmıştır. Bir S yüzeyi içerisinde $\Delta F = 0$ Laplace denklemini sağlayan ve S 'nin sınırında belli bir değer alan F fonksiyonunun bulunması problemi olan Dirichlet probleminin bir integral denklem problemine eşdeğer olduğu 1870 yılında Liouville tarafından λ parametresinin bir açılımı olarak verilmiştir. Bu çözüm daha önceden Poisson ve Liouville' in kullandığı ardışık yaklaşım yöntemine karşılık gelir. İntegral sınırlarından birinin değişken olan doğrusal integral denklemlerle ilgili çalışmalar İtalyan matematikçi Vito Volterra (1860-1940) tarafından yayımlanmıştır.

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^\infty K(x, t) \varphi(y) dy$$

integral denklemi 1900 yılında ilk kez Eric İvar Fredholm (1866-1927) tarafından incelenmiştir. Fredholm de Volterra' nın 1884 yılında sunduğu benzer yaklaşım problemlerini incelemiş ve 1903' te bu konuda makalesini yayınlamıştır. Ayrıca integral denklemlerle ilgili Tricomi (1955), Petrovsky (1953) ve Lovitt (1924)'e ait kaynaklar bulunmaktadır.

1.9. Olasılık Teorisi ile İlgili Temel Kavramlar

1.9.1. Olasılığın Klasik Tanımı

Olasılığın klasik tanımı olasılığın birinci teorik tanımından önce ortaya konmuştur. Bu nedenle olasılığın klasik tanımı, olasılığın birinci teorik tanımından elde edilmelidir. Bunun için aşağıdaki iki koşul sağlanmalıdır.

1. $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ olur.
2. Her w_i , basit olasılığı aynı p olasılığına sahiptir. Yani $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$ dir. Bu koşullar altında $\forall A \subseteq \Omega$ olayının olasılığını bulalım.

$$A = \{w_{i_1}, w_{i_2}, \dots, w_{i_m}\}, 0 \leq m \leq n$$

olsun. Olasılığın birinci teorik tanımına dayanarak

$$P(A) = \sum_{j: w_{i_j} \in A} p_{w_{i_j}} = p_{w_{i_1}} + p_{w_{i_2}} + \dots + p_{w_{i_m}} \quad (1.29)$$
$$= p + p + p + \dots + p = mp \text{ (m tane)}$$

yazılabilir. Şimdi p yi bulalım.

$\{p_i, i \geq 1\}$, dizisinin 2. Özelliğine göre $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ dir.

Buradan $p + p + p + \dots + p = 1 \Rightarrow np = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{n}$ elde edilir. Bu nedenle

$$P(A) = mp = \frac{m}{n}$$

yazılabilir. Böylece A olayının klasik anlamda olasılığı

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

olur. Burada n basit olaylar uzayının eleman sayısı m ise A olayını gerçekleştiren elemanların sayısıdır.

1.9.2. Beklenen Değerin Tanımı

Rastgele değişkenin istatistiksel karakteristikleri arasında en önemlisi beklenen değerdir. Deneyisel çalışmalarda beklenen değer yerine ortalama değer de kullanılır.

$(\Omega, \xi, P(.))$ olasılık uzayında reel değerler alan bir $\xi(w)$ rastgele değişkeni verildiğinde eğer $\int_{\Omega} \xi(w)P(dw)$ integrali varsa , bu integrali değerine $\xi(w)$ rastgele değişkeninin beklenen değeri denir.

Beklenen değer aşağıdaki gibi gösterilir.

$$E \xi(w) = \int_{\Omega} \xi(w)P(dw).$$

1.9.3. Moment Çıkaran Fonksiyonlar

$\xi(w)$ kesikli dağılıma sahip bir rastgele değişken olsun.

$$\Psi_{\xi}(z) = E(z^{\xi(w)}) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(\xi(\omega) = n) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n \quad (1.30)$$

Fonksiyonuna $\xi(w)$ 'nin momentçıkaran fonksiyonu denir.

Bu seri en azından $|z| \leq 1$ için yakınsaktır. Moment çıkaran fonksiyonlar genellikle $\xi(\omega)$ rastgele değişkeninin değerleri negatif olmayan tam sayılar olduğunda kullanılır.

1.9.4. Dağılım Fonksiyonu

Rastgele değişkenin dağılımı ile işlem yapmak her zaman kolay değildir. Bu nedenle olasılık teorisinde rastgele değişkenin dağılım fonksiyonu kavramı verilir.

$\xi(\omega), (\Omega, \xi, P(.))$ olasılık uzayını $(R, B, M_{\xi}(.))$ seçim uzayına dönüştüren reel değerli rastgele değişken olsun. Bu durumda biliyoruz ki, $\forall B \in B$ için

$$M_{\xi}(B) = P\{\omega: \xi(\omega) \in B\}$$

$\xi(\omega)$ rastgele değişkeninin dağılımıdır.

Özel durumda ,

$B = (-\infty, x)$ ve $x \in R$ olursa $\xi(\omega)$ rastgele değişkeninin dağılımı daha basit bir şekil alır. Bu durumda aşağıdaki tanımı yapalım.

Bir rastgele değişkenin dağılımında $B = (-\infty, x)$ alınırsa

$$M_{\xi}\{(-\infty, x)\} = P\{\omega: \xi(\omega) \in (-\infty, x)\} = P\{\omega: \xi(\omega) < x\}$$

Fonksiyonuna $\xi(\omega)$ rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu denir.

Dağılım fonksiyonunu

$$F_{\xi}(x) = P\{\omega: \xi(\omega) < x\}$$

şeklinde gösterilir.

1.9.5. Varyans

$V_{\xi}(\omega) = E[\xi(\omega) - E\xi(\omega)]^2$ sayısına $\xi(\omega)$ rastgele değişkeninin varyansı denir.

Bir başka deyişle varyans, rastgele değişkenin aldığı değerlerin beklenen değerden sapmasıdır. Varyans için başka formül

$$\begin{aligned} V_{\xi}(\omega) &= E[\xi(\omega) - E\xi(\omega)]^2 \\ &= E[\xi^2(\omega) - 2\xi(\omega)E\xi(\omega) + (E\xi(\omega))^2] \\ &= E\xi^2(\omega) - 2[E\xi(\omega)]^2 + [E\xi(\omega)]^2 \\ &= E\xi^2(\omega) - [E\xi(\omega)]^2 \end{aligned}$$

şeklinde verilebilir.

1.10. Bazı Olasılık Dağılımları

1.10.1. Normal Dağılımın Özellikleri

Normal dağılıma sahip X rastgele değişkeninin parametreleri, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dir.

Normal dağılımın moment çıkaran fonksiyonundan (Feller, 1968) faydalananak

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)}. \quad (1.31)$$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ rastgele değişkeninin birinci, ikinci momentleri ve varyansı

$$E[X] = \mu, E[X^2] = \mu^2 + \sigma^2 \text{ ve } Var[X] = \sigma^2 \quad (1.32)$$

bulunur. Momentler kullanılarak X ve Y bağımsız rastgele değişkenler için $E[XY] = E[X]E[Y]$ olur.

1.10.2. Düzgün Dağılımın Özellikleri

Düzgün dağılıma sahip X rastgele değişkeninin parametreleri, $X \sim U(\alpha, \beta)$ dir.

Düzgün dağılımın moment çıkaran fonksiyonundan (Feller, 1968) faydalanarak

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{(\beta - \alpha)t}. \quad (1.33)$$

$X \sim U(\alpha, \beta)$ rastgele değişkeninin birinci momenti ve varyansı

$$E[X] = \frac{\alpha + \beta}{2}, Var[X] = \frac{(\alpha - \beta)^2}{12} \quad (1.34)$$

bulunur.

1.10.3. Gamma Dağılımının Özellikleri

Gamma dağılıma sahip X rastgele değişkeninin parametreleri, $X \sim G(\alpha, \beta)$ dir.

Gamma dağılımın moment çıkaran fonksiyonundan (Feller, 1968) faydalanarak

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{1}{(1 - \beta t)^\alpha}. \quad (1.35)$$

$X \sim G(\alpha, \beta)$ rastgele değişkeninin birinci momenti ve varyansı

$$E[X] = \alpha\beta, Var[X] = \alpha\beta^2 \quad (1.36)$$

bulunur.

1.10.4. Geometrik Dağılımın Özellikleri

Geometrik dağılıma sahip X rastgele değişkeninin parametreleri, $X \sim G(p, q)$ dir.

Geometrik dağılımın moment çıkaran fonksiyonundan (Feller, 1968) faydalanarak

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{pe^t}{1 - qe^t}. \quad (1.37)$$

$X \sim G(p, q)$ rastgele değişkeninin birinci momenti ve varyansı

$$E[X] = \frac{1}{p}, Var[X] = \frac{q}{p^2} \quad (1.38)$$

bulunur.

1.10.5. Standart Beta Dağılımı Özellikleri

Öncelikle $\alpha > 0$, $\beta > 0$ parametresine bağlı $B(\alpha, \beta)$ fonksiyonu tanımlayalım (Feller, 1968). Fonksiyon

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \quad (1.39)$$

Şeklindedir.

Yoğunluk fonksiyonu tanımından;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{diğer } x \text{ler} \end{cases} \quad (1.40)$$

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad (1.41)$$

Şeklinde tanımlanır.

Beta Dağılımının Beklenen Değeri

$$X \sim B(\alpha, \beta) \text{ ise } E[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$Var[x] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2 \cdot (\alpha+\beta+1)}$$

$$E[X^2] = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}$$

$$E[X^3] = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}$$

\vdots

$$E[X^N] = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \dots (\alpha+(n-1))}{(\alpha+\beta+n-1)(\alpha+\beta+n-2) \dots (\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}$$

Y_0 ve Y_1 bağımsız rastgele değişkenler olduğundan $E[Y_0, Y_1] = 0$ olur. Yani Y_0 ve Y_1 in beklenen değeri sıfır olur.

$$x_N(t) = \sum_{k=0}^N x(k)t^k \quad (1.42)$$

$$E[x_N(t)] = \sum_{k=0}^N E[x(k)]t^k,$$

$$Var[x_N(t)] = \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N Cov(x(i), x(j)) t^i + j, \quad (1.43)$$

$$Cov(x(i), x(j)) = E(x(i)x(j)) - E[X_i]E[X_j], \forall i, j = 0, 1, \dots, N. \quad (1.44)$$

1.10.6. Üçgensel Dağılım

Bir X rastgele değişkeni,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, & a < x < c \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}, & c \leq x < b \end{cases}$$

şeklinde olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahipse genelleştirilmiş üçgensel dağılıma sahiptir (Feller, 1968). Burada a ve b sırasıyla rastgele değişkenin (olasılık yoğunluk fonksiyonunun) alabileceği en küçük ve en büyük değerlerken, c dağılımın mod değeridir.

Beklenen değer ve varyansı

$$E(X) = \frac{(a+b+c)}{3}, Var(X) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18}$$

ile verilir.

Üçgensel dağılımın moment çıkaran fonksiyonu;

$$M_x(t) = 2 \frac{(b-c)e^{at} - (b-a)e^{ct} + (c-a)e^{bt}}{(b-a)(c-a)(b-c)t^2} \quad (1.45)$$

1.10.7. Üstel Dağılım

Sürekli tipteki t rastgele değişkeni bir parametrelili üstel dağılıma sahip ise beklenen değer ya da ortalaması

$$E(t) = \frac{1}{\lambda}$$

dır (Evans vd., 1993).

Sürekli tipteki t rastgele değişkeni bir parametrelili üstel dağılıma sahip ise varyansı

$$Var(t) = \frac{1}{\lambda^2}$$

dır (Evans vd., 1993).

Üstel dağılımın moment çıkaran fonksiyonu;

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{\lambda}{\lambda - t}.$$

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Rastgele Diferansiyel Dönüşüm Metodunun İntegral Denklemlere Uygulanması

2.1.1. Rastgele Diferansiyel Dönüşüm Metodu Yöntemi

Bir fonksiyonun türevinin değişimi aşağıdaki gibidir.

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad (2.1)$$

Ve ters dönüşümü de aşağıdaki şekildedir.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F(k)(x - x_0)^k \quad (2.2)$$

Bu yöntemde kullanılan diğer değişimlerde aşağıdaki gibidir.

Teorem 1. $f(x) = g(x) \pm h(x)$ ise $F(k) = G(k) \pm H(k)$.

Teorem 2. $f(x) = cg(x)$ ise $F(k) = cG(k)$, c sabit sayı

Teorem 3. $f(x) = \frac{d^n g(x)}{dx^n}$ ise $F(k) = \frac{(k+n)!}{k!} G(k+n)$.

Teorem 4. $f(x) = g(x)h(x)$, ise $F(k) = \sum_{k_1=0}^k G(k_1)H(k-k_1)$.

Teorem 5. $f(x) = x^n$, ise $F(k) = \delta(k-n) \delta(k-n) = \begin{cases} 1, k=n \\ 0, k \neq n \end{cases}$.

Teorem 6. (Arikoğlu ve Özkol, 2008; Fakharzadeh vd., 2015)

$f(x) = g_1(x)g_2(x)\dots g_{n-1}(x)g_n(x)$, ise $F(k) =$

$$\sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1)G_2(k_2-k_1) \dots G_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2})G_n(k-k_{n-1}).$$

Teorem 7. (Arikoğlu ve Özkol, 2008; Fakharzadeh vd., 2015) $f(x) = \int_{x_0}^x g(t)dt$ ise,

$$F(k) = \frac{G(k-1)}{k}, k \geq 1 \text{ için}$$

Teorem 8. (Arikoğlu ve Özkol, 2008; Fakharzadeh vd., 2015) $f(x) =$

$\int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_{n-1}} \cdots \int_{x_0}^{x_3} \int_{x_0}^{x_2} \int_{x_0}^{x_1} g(t) dt dx_1 dx_2 dx_3 \cdots dx_{n-1}$ ise $F(k) = \frac{(k-n)!}{k!} G(k-n)$, $k \geq n$ için.

Teorem 9. (Arikoğlu ve Özkol, 2008; Fakharzadeh vd., 2015) $f(x) = g(x) \int_{x_0}^x h(t) dt$ ise,

$F(k) = \sum_{k_1=1}^k \frac{1}{k_1} G(k-k_1) H(k_1-1)$, $k \geq 1$ için.

Teorem 10. (Arikoğlu ve Özkol, 2008; Fakharzadeh vd., 2015) $f(x) = \int_{x_0}^x g_1(t) g_2(t) dt$

ise $F(k) = \frac{1}{k} \sum_{k_1=0}^k G_1(k_1) G_2(k-k_1-1)$, $k \geq 1$ için.

Teorem 11. (Arikoğlu ve Özkol, 2008; Fakharzadeh vd., 2015)

$f(x) = \int_{x_0}^x g_1(t) g_2(t) \cdots g_{n-1}(t) g_n(t) dt$ ise $F(k) =$

$\frac{1}{k} \sum_{k_{n-1}=0}^{k-1} \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}-1} \cdots \sum_{k_2=0}^{k_3-1} \sum_{k_1=0}^{k_2-1} G_1(k_1) G_2(k_2-k_1) \cdots G_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2}) G_n(k-k_{n-1}-1)$.

Teorem 12. (Arikoğlu ve Özkol, 2008; Fakharzadeh vd., 2015)

$f(x) = [h_1(x) h_2(x) \cdots h_{n-1}(x) h_n(x)] \int_{x_0}^x g_1(t) g_2(t) \cdots g_{m-1}(t) g_m(t) dt$ ise $F(k) =$

$\sum_{k_{m+n-1}=1}^k \sum_{k_{m+n-2}=1}^{k_{m+n-1}-1} \cdots \sum_{k_2=1}^{k_3-1} \sum_{k_1=1}^{k_2-1} \frac{1}{k_m} G_1(k_1-1) G_2(k_2-k_1) \cdots G_{m-1}(k_{m-1}-k_{m-2}) G_m(k_m-k_{m-1}) x H_1(k_{m+1}-k_m) H_2(k_{m+2}-k_{m+1}) \cdots H_{n-1}(k_{n+m-1}-k_{n+m-2}) H_n\left(\frac{k-k_{m+n-1}}{k_{m+n-1}}\right)$.

2.1.2. Rastgele Volterra İntegral Denkleminin Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile Çözümü

λ sayısal bir parametre $f(x)$ ve $K(x, t)$ bilinen fonksiyonlar ve $U(t)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$\varphi(x) U(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) u(t) dt \quad (2.3)$$

Denklemin volterra integral denkleminin en genel hali denir. Volterra integral denkleminin fredholm integral denkleminde tek farkı üst sınırının değişken olmasıdır.

1) $\varphi(x) = 0$ alınırsa

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)U(t)dt = 0 \quad (2.4)$$

denklemini elde edilir. Buna 1.tip volterra integral denklemi denir.

2) $\varphi(x) = 1$ alınırsa

$$U(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)U(t)dt \quad (2.5)$$

denklemini elde edilir. Buna 2.tip volterra integral denklemi denir.

Yukarıda volterra integral denkleminin tanımını yaptık. Biz çalışmamızda bu denklemi rastgele denklemlere uyguladık ve bunu da $f(x)$ 'in katsayılarını rastgele seçerek yaptık. Volterra denklemlerin DDY ile çözülmesinde dönüşüm formüllerini kullandık.

Rastgele Lineer İntegral Denkleminin Çözümünde DDY Kullanımı

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)u(t)dt \quad (2.6)$$

ifadesine integral denklem denir. Burada $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonunun lineer olması halinde, integral denklem integral lineer denklem adını alır.

1.Tür Volterra İntegral Denkleminin Çözümünde DDY kullanımı

Örnek2.1:

$$u(x) = B + Ax - \frac{Ax^3}{3!} + \int_0^x (x - t) u(t) dt, \quad u(0) = B \quad (2.7)$$

Burada $AveB$ düzgün dağılıma sahip rastgele değişken (Chiles ve Delfiner, 1999) ve $\alpha = 2ve\beta = 4$ $A, B \sim U(\alpha = 1, \beta = 2)$ olmak üzere 2. tip rastgele volterra integral denkleminin çözüm davranışlarını DDY ile elde ediniz.

Çözüm:

(2.7) denklemi dönüşüm formüllerinden teorem 5,10 ve 11 kullanılarak aşağıdaki denkleme dönüştürülür.

$$U(k) = B\delta(k) + A\delta(k-1) - \frac{A}{3!}\delta(k-3) + \sum_{k_1=1}^k \frac{\delta(k-k_1-1)U(k_1-1)}{k_1} - \sum_{k_1=0}^{k-1} \frac{\delta(k_1-1)U(k-k_1-1)}{k}, k \geq 1 \quad (2.8)$$

teorem 10 ve 11 dikkate alınarak bu eşitlikte ters dönüşüm yöntemi kullanılırsa aşağıdaki çözüm elde edilir. $U(k), k = 0, 1, 2, \dots$,

$$U(0) = B, U(1) = A, U(2) = \frac{B}{2!}, U(3) = 0, U(4) = \frac{B}{4!}, U(5) = 0, U(6) = \frac{B}{6!}, U(7) = 0$$

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)x^k = Ax + B + \frac{Bx^2}{2!} + \frac{Bx^4}{4!} + \frac{Bx^6}{6!} + \dots = Ax + B \left[1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \right] = Ax + B \cosh(x) \quad (2.9)$$

Ortalama kare ve diferansiyel dönüşüm metodu uygulanarak beklenen değeri ve varyansı hesaplanır (Fakharzadeh, Hesamaeddini, ve Solemaniyaeki, 2015).

$$E[u(x)] = \sum_{k=0}^n E[U(k)]x^k \quad (2.10)$$

$$Var[u(x)] = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n cov(U(i), U(j))x^{i+j} \quad (2.11)$$

$X \sim U(\alpha, \beta)$ parametreleri ile düzgün dağılmış rastgele bir X değişkeni için, momentlerin düzgün dağılımın moment çıkaran fonksiyonu ile elde edilebileceği bilinmektedir (Feller, 1968).

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{(\beta - \alpha)t} \quad (2.12)$$

Bu nedenle, $X \sim U(\alpha, \beta)$ rasgele değişkeninin ilk ve ikinci momentleri:

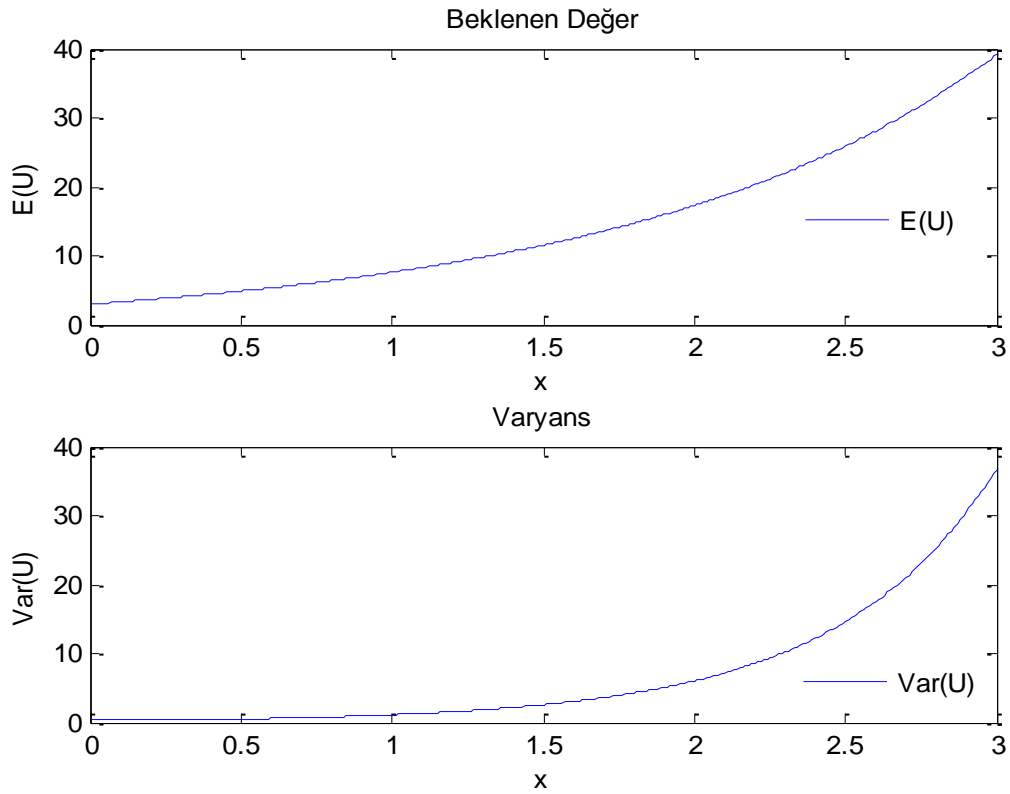
$$E[X] = \frac{\alpha + \beta}{2}, Var[X] = \frac{(\alpha - \beta)^2}{12}. \text{ Ortalama değer ve varyanstır.}$$

Bu momentler ve bağımsız rastgele değişken X ve Y için $E[XY] = E[X]E[Y]$ olduğu için, beklenen değer ve varyans için yaklaşık formüller hesaplanabilir.

$$E(u(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} E(U(k))x^k = E(A)x + E(B) \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right] = E(A)x + E(B)\cosh(x) \quad (2.13)$$

$$E(u(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} E(U(k))x^k = E(A)x + E(B) \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right] = E(A)x + E(B)\cosh(x) \quad (2.14)$$

$$\alpha = 1 \text{ ve } \beta = 2, A, B \sim U(\alpha = 2, \beta = 4), E(u(x)) = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\cosh(x), \text{Var}(u(x)) = \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{12}\cosh(x)^2 \quad (2.15)$$



Şekil 2. 1. Rastgele DDY'den elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri

Örnek 2.2:

$$u(x) = (A + C)x + \frac{Ax^3}{3!} - \int_0^x (t - x) u(t) dt, \quad u(0) = 0 \quad (2.16)$$

burada $AveC$ Beta dağılımına sahip rastgele değişken $A, C \sim Beta(\alpha = 2, \beta = 3)$ olmak üzere 2. tip rastgele volterra integral denkleminin çözüm davranışlarını DDY ile elde ediniz.

Çözüm:

(2.16) denklemi dönüşüm formüllerinden teorem 5,10 ve 11 kullanılarak aşağıdaki denkleme dönüştürülür.

$$U(k) = (A + C)\delta(k - 1) + \frac{A\delta(k-3)}{3!} - \sum_{k_1=1}^k \frac{\delta(k-k_1-1)U(k_1-1)}{k_1} + \sum_{k_1=0}^{k-1} \frac{\delta(k_1-1)U(k-k_1-1)}{k} \quad (2.17)$$

$$U(k), k = 0, 1, 2, \dots, \text{ve}$$

teorem 2.10 ve 2.11 dikkate alınarak bu eşitlikte ters dönüşüm yöntemi kullanılırsa aşağıdaki çözüm elde edilir. $U(k), k = 0, 1, 2, \dots$,

$$U(0) = 0, U(1) = A + C, U(2) = 0, U(3) = -\frac{C}{3!}, U(4) = 0, U(5) = \frac{C}{5!}, U(6) = 0, U(7) = -\frac{C}{7!}, \quad (2.18)$$

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)x^k = (A + C)x - \frac{Cx^3}{3!} + \frac{Cx^5}{5!} - \frac{Cx^7}{7!} + \dots = Ax + C \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right] = Ax + C \sin(x) \quad (2.19)$$

$X \sim B(\alpha, \beta)$ parametrelerine sahip bir beta dağıtılmış rastgele değişken X için, momentlerin beta dağılımının moment oluşturma fonksiyonu aracılığıyla elde edilebileceği bilinmektedir(Feller, 1968).

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{r=0}^{k-1} \frac{\alpha+r}{\alpha+\beta+r} \right) t^k / k! \quad (2.20)$$

Böylece 1. Moment ,2.moment ve varyansı aşağıdaki gibidir.

$$E[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, E[X^2] = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)} \text{ ve } Var[X] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \quad (2.21)$$

Bu momentler ve bağımsız rastgele değişken X ve Y için $E[XY] = E[X] E[Y]$ olduğu için, beklenen değer ve varyans için yaklaşık formüller hesaplanabilir.

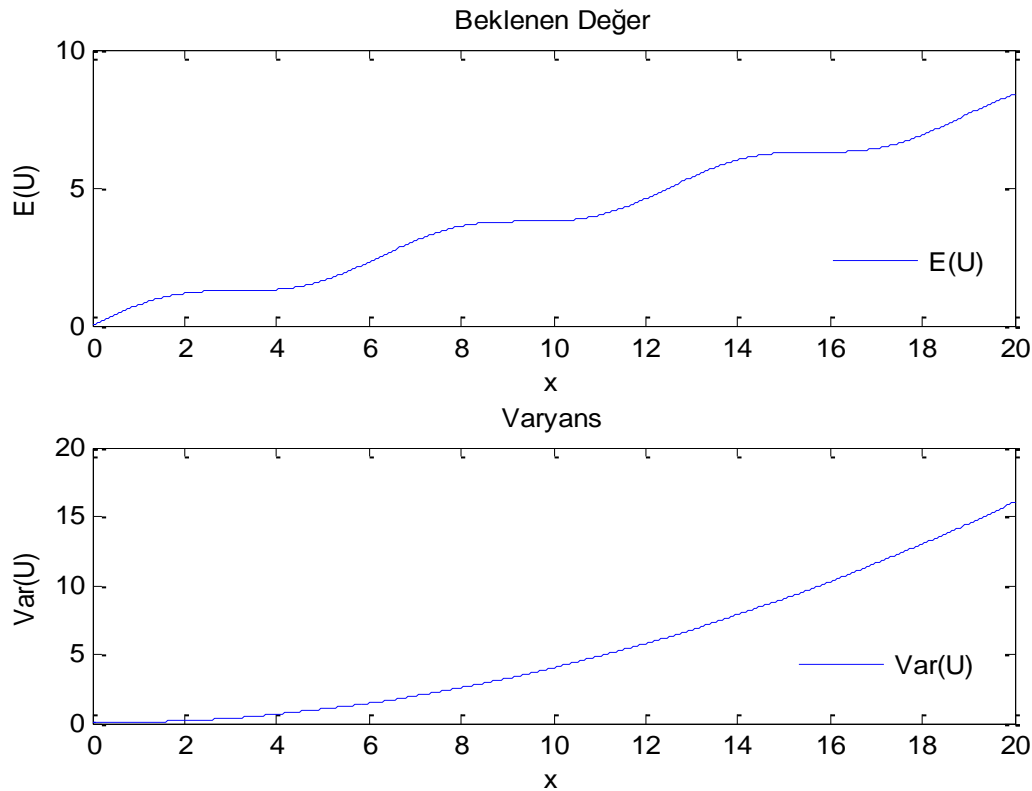
$$E(u(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} E(U(k))x^k = E(A)x + E(C) \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right] = E(A)x + E(C)\sin(x) \quad (2.22)$$

$$Var(u(x)) = E(u(x)^2) - E(u(x))^2 = Var(A)x^2 + Var(C)\sin^2(x) \quad (2.23)$$

$\alpha = 2$ ve $\beta = 3$, parametreleri için $A, C \sim Beta(\alpha = 2, \beta = 3)$, $E(u(x)) = \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}\sin(x)$,

$$Var(u(x)) = \frac{1}{25}x^2 + \frac{1}{25}\sin^2(x) \quad (2.24)$$

olarak bulunur.



Şekil 2. 2. Rastgele DDY'den elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri

Örnek 2.3: $u(x) = A + Ax + \int_0^x (x-t) u(t) dt, u(0) = A$ (2.25)

burada A normal dağılıma sahip rastgele değişken $A \sim N(\mu = 5, \sigma^2 = 4)$ olmak üzere 2. tip rastgele volterra integral denkleminin çözüm davranışlarını DDY ile elde ediniz.

Çözüm:(2.25) denklemini dönüşüm formüllerinden teorem 5,10 ve 11 kullanılarak aşağıdaki denkleme dönüştürülür.

$$U(k) = A\delta(k) + A\delta(k-1) + \sum_{k_1=1}^k \frac{\delta(k-k_1-1)U(k_1-1)}{k_1} - \sum_{k_1=0}^{k-1} \frac{\delta(k_1-1)U(k-k_1-1)}{k}, k \geq 1$$

(2.26)

teorem 10 ve 11 dikkate alınarak bu eşitlikte ters dönüşüm yöntemi kullanılırsa aşağıdaki çözüm elde edilir. $U(k), k = 0, 1, 2, \dots$,

$$U(0) = A, U(1) = \frac{A}{1!}, U(2) = \frac{A}{2!}, U(3) = \frac{A}{3!}, U(4) = \frac{A}{4!}, U(5) = \frac{A}{5!}, U(6) = \frac{A}{6!}, U(7) = \frac{A}{7!}, \dots$$

ve

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)x^k = A + Ax + \frac{Ax^2}{2!} + \frac{Ax^3}{3!} + \frac{Ax^4}{4!} + \frac{Ax^5}{5!} \dots$$

$$= A \left[1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right] = Ae^x$$

(2.27)

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ parametreleri ile normal dağılmış rastgele bir X değişkeni için, momentlerin normal dağılımın moment çıkaran fonksiyonu ile elde edilebileceği bilinmektedir (Feller, 1968).

$M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)}$ buradan 2. Momenti ve varyansını hesaplayalım.

$$E[X] = \mu, E[X^2] = \mu^2 + \sigma^2, Var[X] = \sigma^2.$$

bu sonuçları kullanarak beklenen değer;

$$E(u(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} E(U(k))x^k = E(A) \left[1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right] = E(A)e^x \quad (2.28)$$

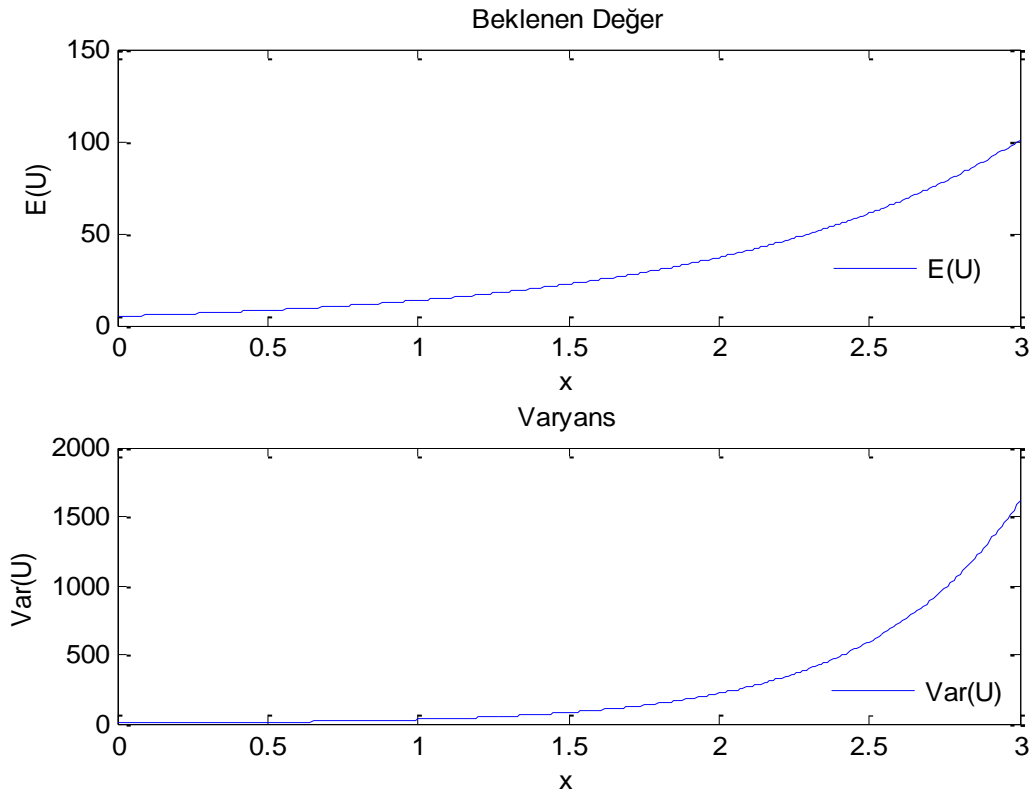
varyansı;

$$Var(u(x)) = E(u(x)^2) - E(u(x))^2 = Var(A) \left[1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right]^2 = Var(A)e^{2x} \quad (2.29)$$

$\mu = 5, \sigma^2 = 4$ özel değerleri için beklenen değer ve varyansını bulup grafiklerini çizelim.

$$E(u(x)) = \mu e^x = 5e^x$$

$$Var(u(x)) = Var(A)e^{2x} = \sigma^2 e^{2x} = 4e^{2x}$$



Şekil 2. 3. Rastgele DDY'den elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri

2.1.3. Rastgele Volterra-İntegro Diferansiyel Denkleminin Çözümünde DDY Kullanımı

Örnek 2.4: Aşağıdaki rastgele değişkenli 1.mertebeden volterra-integro denklemini DDY yöntemiyle çözelim.

$$u'(x) = -\frac{B}{2}e^{-2x} + A + \frac{B}{2} - Ae^{-x} - Be^{-x} - \int_0^x e^{-t} u(t) dt, \quad u(0) = A + B, u'(0) = -B \quad (2.30)$$

Burada A ve B Gamma dağılımına sahip rastgele değişken ve $A, B \sim \text{Gamma}(\alpha = 3, \beta = 5)$.

Çözüm:

(2.30) denklemi dönüşüm formüllerinden teorem 5,10 ve 11 kullanılarak aşağıdaki denkleme dönüştürülür.

$$(k+1)U(k+1) = -\frac{\frac{B}{2}(-2)^k}{k!} + A\delta(k) + \frac{B}{2}\delta(k) - \frac{A(-1)^k}{k!} - \frac{B(-1)^k}{k!} - \sum_{k_1=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k_1} U(k-k_1-1)}{k_1! k} \quad (2.31)$$

teorem 10 ve 11 dikkate alınarak bu eşitlikte ters dönüşüm yöntemi kullanılırsa aşağıdaki çözüm elde edilir. $U(k), k = 0, 1, 2, \dots$,

$$U(0) = A + B, U(1) = -\frac{B}{1!}, U(2) = \frac{B}{2!}, U(3) = -\frac{B}{3!}, U(4) = \frac{B}{4!}, U(5) = -\frac{B}{5!}, U(6) = \frac{B}{6!},$$

$$U(7) = -\frac{B}{7!} \quad (2.32)$$

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)x^k = A + B - Bx + \frac{Bx^2}{2!} - \frac{Bx^3}{3!} + \frac{Bx^4}{4!} - \frac{Bx^5}{5!} + \dots = A + B \left[1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots \right] = A + Be^{-x} \quad (2.33)$$

$X \sim G(\alpha, \beta)$ parametrelerine sahip bir gamma dağılımlı X değişkeni X için, momentlerin gama dağılımının moment üretme fonksiyonu ile elde edilebileceği bilinmektedir (Feller, 1968).

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{1}{(1 - \beta t)^\alpha}.$$

Böylece 1.moment ve rastgele değişkenin varyansı $X \sim G(\alpha, \beta)$ aşağıdaki gibidir:

$$E[X] = \alpha\beta, \text{Var}[X] = \alpha\beta^2.$$

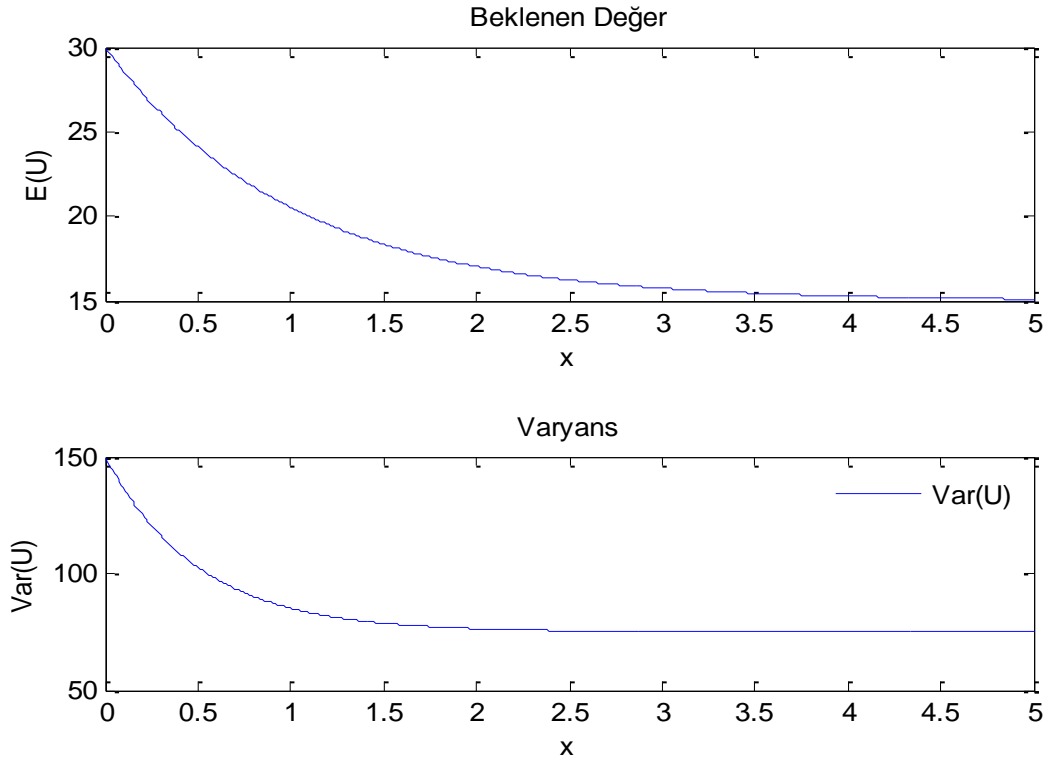
Bu momentler ve bağımsız rastgele değişken X ve Y için $E[XY] = E[X] E[Y]$ olduğu için, beklenen değer ve varyans için yaklaşık formüller hesaplanabilir.

$$E(u(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} E(U(k))x^k = E(A) + E(B) \left[1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots \right] = E(A) + E(B)e^{-x} \quad (2.34)$$

$$\text{Var}(u(x)) = E(u(x)^2) - E(u(x))^2 = \text{Var}(A) + \text{Var}(B) \left[1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots \right]^2 = \text{Var}(A) + \text{Var}(B)e^{-2x} \quad (2.35)$$

$$\alpha = 3 \text{ ve } \beta = 5 \text{ parametreleri için } A, B \sim G(\alpha = 3, \beta = 5), E(u(x)) = 15 + 15e^{-x}, \\ \text{Var}(u(x)) = 75 + 75e^{-2x}$$

şeklinde bulunur.



Şekil 2. 4. Rastgele DDY'den elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri

Örnek 2.5:

$$u'(x) = \frac{A-B}{2} + B\cos(x) - A\sin(x) - \frac{A+B}{2}e^x \sin(x) + \frac{B-A}{2}e^x \cos(x) + \int_0^x (e^t u(t)) dt, u(0) = 0. \quad (2.36)$$

$A \sim \text{Gamma}(\alpha = 4, \beta = 1)$ ve $B \sim \text{Geometric}(p = 1/3, q = 2/3)$ dağılımına sahip volterra-integro diferansiyel denkleminin çözüm davranışlarını inceleyiniz.

Çözüm: (2.36) denkleminin her iki tarafının diferansiyel dönüşümü alınır

$$(k+1)U(k+1) = \frac{A-B}{2}\delta(k) + \frac{B}{k!} - \frac{A}{k!}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{A+B}{2}\sum_{k_1=0}^k \frac{\sin(\frac{k_1\pi}{2})}{k_1!(k-k_1)!} + \frac{B-A}{2}\sum_{k_1=0}^k \frac{\cos(\frac{k_1\pi}{2})}{k_1!(k-k_1)!} - 2\sum_{k_1=0}^{k-1} \frac{U(k-k_1-1)}{kk_1!} \quad k \geq 1. \quad (2.37)$$

elde edilir. Gerekli dönüşüm formüllerini kullanırsak

$$U(0) = A, U(1) = B, U(2) = \frac{-A}{2!}, U(3) = -\frac{B}{3!}, U(4) = \frac{A}{4!}, U(5) = \frac{B}{5!}, U(6) = -\frac{A}{6!}, U(7) = -\frac{B}{7!}, U(8) = \frac{A}{8!}, U(9) = \frac{B}{9!}, \dots \text{ve}$$

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)x^k = A - \frac{Ax^2}{2!} + \frac{Ax^4}{4!} - \frac{Ax^6}{6!} + \frac{Ax^8}{8!} - \dots + Bx - \frac{Bx^3}{3!} + \frac{Bx^5}{5!} - \frac{Bx^7}{7!} + \frac{Bx^9}{9!} \dots = A \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right] + B \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right]$$

$$= A \cos(x) + B \sin(x) \quad (2.38)$$

$A \sim \text{Gamma}(\alpha = 4, \beta = 1)$ ve $B \sim \text{Geometric}(p = 1/3, q = 2/3)$ dağılımına sahip moment çıkaran fonksiyonu (Feller, 1968).

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = \frac{pe^t}{1 - qe^t}$$

Buradan beklenen değer ve varyansını hesaplarsak;

$$E[x] = \frac{1}{p}, \quad \text{Var}[x] = \frac{q}{p^2} \quad E[X] = \alpha\beta, \text{Var}[X] = \alpha\beta^2$$

Bunları ve rastgele değişkenlerin bağımsızlığını kullanarak bulduğumuz sonucun beklenen değer ve varyansını hesaplarsak;

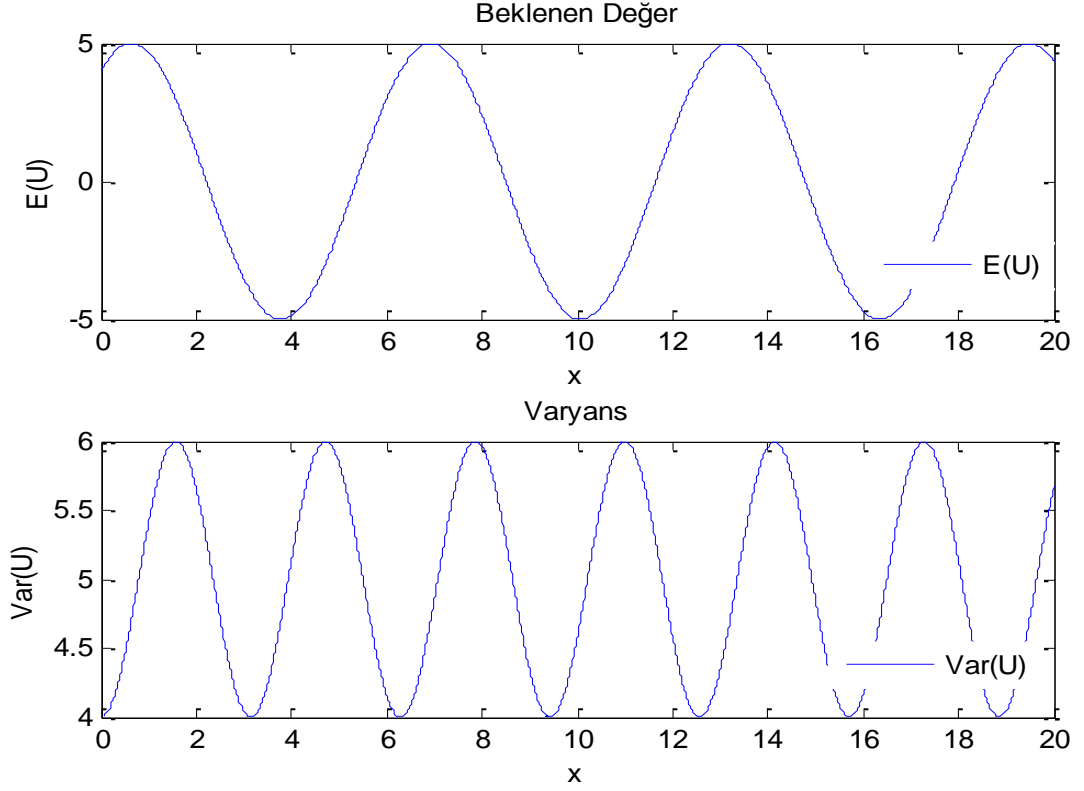
$$E(u(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} E(U(k))x^k = E(A) \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right] + E(B) \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right] = E(A)\cos(x) + E(B)\sin(x)$$

ve

$$\begin{aligned} \text{Var}(u(x)) &= E(u(x)^2) - E(u(x))^2 \\ &= \text{Var}(A) \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right]^2 + \text{Var}(B) \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right]^2 \\ &= \text{Var}(A)\cos^2(x) + \text{Var}(B)\sin^2(x) \end{aligned}$$

$\alpha = 4, \beta = 1$ ve $p = 1/3, q = \frac{2}{3}$ değerleri için beklenen değer ve varyans grafiklerini çizelim.

$$E(u(x)) = 4 \cos(x) + 3 \sin(x), Var(u(x)) = 4 \cos^2(x) + 6 \sin^2(x)$$



Şekil 2. 5. Rastgele DDY'den elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri

3. RASTGELE İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE KULLANILAN BAZI FARKLI YÖNTEMLER

3.1. Rastgele Varyasyon İterasyon Yöntemi

Bu metot L lineer N nonlinear olmak üzere

$$Lu + Nu = f(x) \quad (3.1)$$

genel nonlinear denkleminin x_0 noktasındaki değerini düzeltmek için u_0 , $Lu = 0$ denkleminin çözümü olmak üzere,

$$u(x_0) = u_0(x_0) + \int_a^b \lambda(Lu_0(x) + Nu_0(x) - f)dx \quad (3.2)$$

düzeltilme formülünü yazabileceğimizi söyler. Burada λ genel lagrange çarpanıdır ve varyasyonel analiz yöntemleri kullanılarak hesaplanabilir. Varyasyonel iterasyon metodu, bu metodun (He, 1999) tarafından geliştirilmesiyle elde edilmiştir. (3.2) denklemini u_0 fonksiyonunu ilk yaklaşım olarak

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(Lu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - f(s))ds \quad (3.3)$$

Biçiminde bir iterasyon metoduna dönüşmüştür. Burada u_n , n .yaklaşık çözüm, \tilde{u}_n ise kısıtlanmış varyasyondur. Yani $\delta\tilde{u}_n = 0$ olacaktır. Ayrıca 3 denklemine düzeltme fonksiyoneli adı verir. Bu fonksiyona varyasyon iterasyon uygularsak $\delta\tilde{u}_n(0) = 0$ olmak üzere

$$\delta u_{n+1}(x) = \delta u_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(Lu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - f(s))ds \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} &= \delta u_n(x) + \int_0^x \delta \lambda(x, s)(Lu_n(s) - f(s))ds \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

elde ederiz. Buradan oluşan euler-langrange problemi çözülerek lagrange çarpanı $\lambda(x, s)$ belirlenir. Ardından başlangıç koşullarını sağlayacak şekilde bir u_0 ilk yaklaşım

fonksiyonu seçilir ve bu değerler (3.3) iterasyon formülünde yerine yazılarak $u_n, n = 1, 2, \dots$ yaklaşımları bulunur. Sonuç olarak çözüm $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ ile verilir.

Varyasyon iterasyon metodunun 2. Tanımını aşağıdaki gibidir.

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) F(u(t)) dt \quad a \leq x \leq b \quad (3.6)$$

$K(x, t)$ integral denklemin kerneli, f ve F bilinen fonksiyon $u(x)$ integral denklemin bilinmeyen çözümü burada varyasyon iterasyon metodunu uygulayalım. (3.6) nın her iki tarafının türevini alalım.

$$u'(x) = f'(x) + \int_a^b \frac{dk(x, t)}{dx} F(u(t)) dt \quad (3.7)$$

(3.7) denkleminde VİM uygulayalım. Bu yöntemdeki düzeltme fonksiyoneline göre

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(s) \{u'_n(s) - f'(s) - \int_a^b \frac{dk(s, t)}{ds} F(u_n^2(t)) ds\} \quad (3.8)$$

$\lambda(s)$ genel lagrange çarpanı

Örnek 3.1:

Aşağıdaki 2. Tür rastgele fredholm integral denkleminin çözümünü VİM yöntemiyle elde ediniz.

$$u(x) = A \cos(2x) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) u(t) dt \quad A \sim \text{üstel}(\lambda) \quad (3.9)$$

$u_0(x) = A \cos(2x)$ başlangıç şartı.

Çözüm:

$$u_{n+1}(x) = A \cos(2x) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) u_n(t) dt$$

$$u_1(x) = A \cos(2x) + \frac{A}{2} \sin(2x) = A \cos(2x) + A \frac{2^1 - 1}{2^1} \sin(2x)$$

$$u_2(x) = A \cos(2x) + \frac{3A}{4} \sin(2x) = A \cos(2x) + A \frac{2^2 - 1}{2^2} \sin(2x)$$

$$u_3(x) = A \cos(2x) + \frac{7A}{8} \sin(2x) = A \cos(2x) + A \frac{2^3 - 1}{2^3} \sin(2x)$$

.

.

.

$$u_n(x) = A \cos(2x) + A \frac{2^n - 1}{2^n} \sin(2x)$$

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$$

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [A \cos(2x) + A \frac{2^n - 1}{2^n} \sin(2x)]$$

$$u(x) = A \cos(2x) + A \sin(2x)$$

sonucuna ulaşılır. Şimdide bu fonksiyonun beklenen değer ve varyansını hesaplayalım.

$$E[u(x)] = E[A \cos(2x) + A \sin(2x)]$$

$$= \cos(2x) E[A] + \sin(2x) E[A]$$

$$= (\cos(2x) + \sin(2x)) \frac{1}{\lambda}$$

Özel olarak $A, \lambda = 2$ parametrelili üstel dağılıma sahip rastgele değişken ise

$$E[u(x)] = \frac{1}{2} [\cos(2x) + \sin(2x)]$$

olarak bulunur.

Varyansı

$$Var[u(x)] = Var[A \cos(2x) + A \sin(2x)]$$

$$= Var[A \cos(2x)] + Var[A \sin(2x)]$$

$$= \cos^2(2x) Var[A] + \sin^2(2x) Var[A]$$

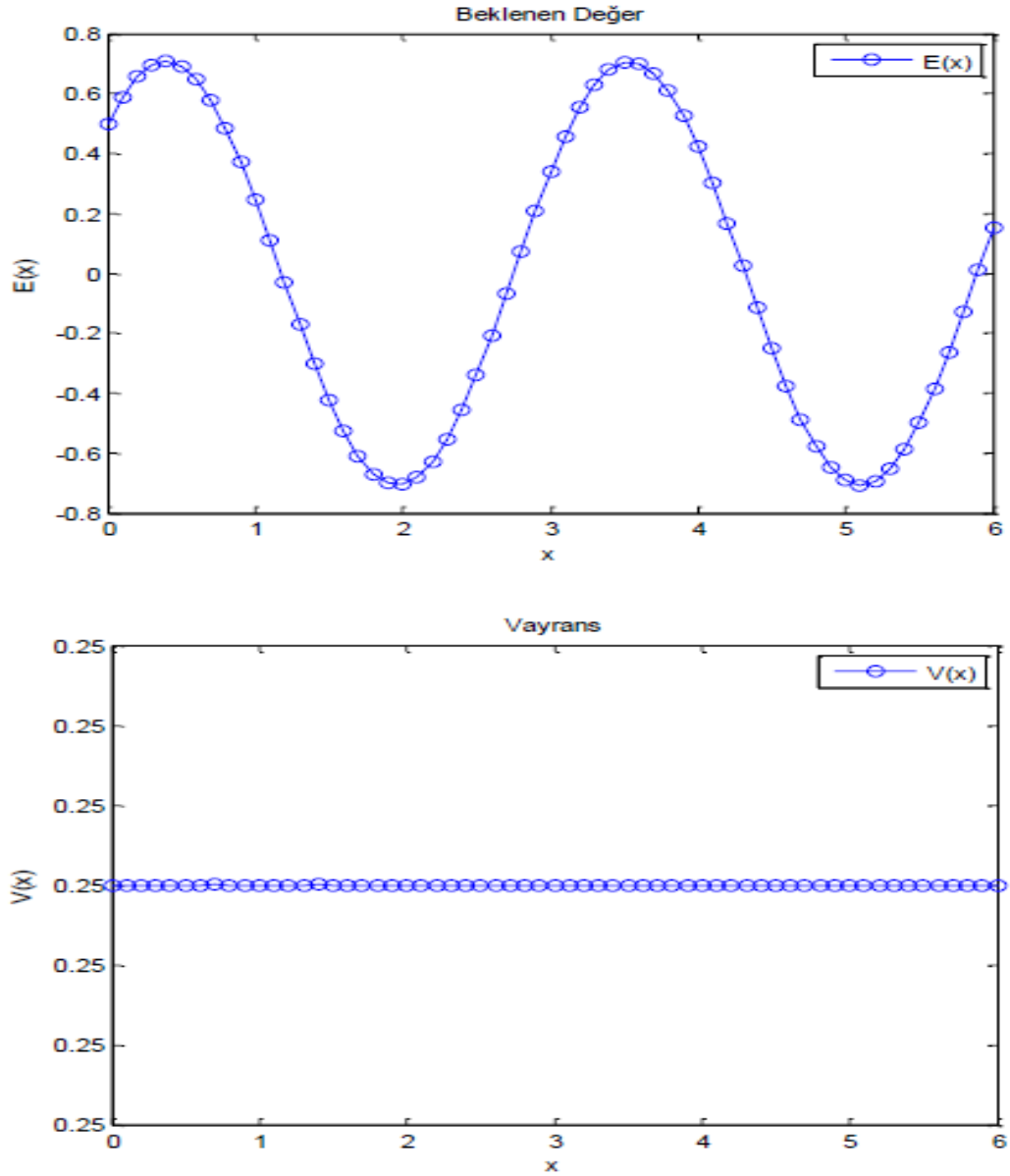
$$= \cos^2(2x) \frac{1}{\lambda^2} + \sin^2(2x) \frac{1}{\lambda^2}$$

$$= [\cos^2(2x) + \sin^2(2x)] \frac{1}{\lambda^2}$$

özel olarak $\lambda = 2$ değeri için

$$Var[u(x)] = \frac{1}{4} [\cos^2(2x) + \sin^2(2x)]$$

olarak bulunur.



Şekil 3. 1. Rastgele VİM ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri

Örnek 3.2: Aşağıdaki 2. Tür rastgele fredholm integral denkleminin çözümünü VİM yöntemiyle elde ediniz.

$$u(x) = A\sqrt{x} + \int_0^1 xtu(t)dt \quad A \sim N(\mu, \sigma^2) \quad (3.10)$$

Çözüm:

Başlangıç şartı $u_0(x) = A\sqrt{x}$

$$u_{n+1}(x) = u_0(x) + \int_0^1 xtu_n(t)dt$$

$$u_1(x) = A\sqrt{x} + \frac{2xA}{5} = A\sqrt{x} + A\frac{3^1 - 1}{5 \times 3^0}x$$

$$u_2(x) = A\sqrt{x} + \frac{8xA}{15} = A\sqrt{x} + A\frac{3^2 - 1}{5 \times 3^1}x$$

$$u_3(x) = A\sqrt{x} + \frac{26xA}{45} = A\sqrt{x} + A\frac{3^3 - 1}{5 \times 3^2}x$$

.

.

.

$$u_n(x) = A\sqrt{x} + A\frac{3^n - 1}{5 \times 3^{n-1}}x$$

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = A\sqrt{x} + A0.6x$$

olarak bulunur. Şimdide bulduğumuz sonucun beklenen değer ve varyansını hesaplayalım.

Beklenen değerini hesaplarsak;

$$E[u(x)] = E[A\sqrt{x} + A0.6x]$$

$$= \sqrt{x}E[A] + 0.6xE[A]$$

$$= \sqrt{x}\mu + 0.6x\mu$$

$$= (\sqrt{x} + 0.6x)\mu$$

Özel olarak $\mu = 3$ değeri için $E[u(x)] = (\sqrt{x} + 0.6x)3$ olarak bulunur.

Varyansını hesaplırsak ;

$$Var[u(x)] = E[u(x^2)] - (E(u(x)))^2$$

$$= Var[A\sqrt{x} + A0.6x]$$

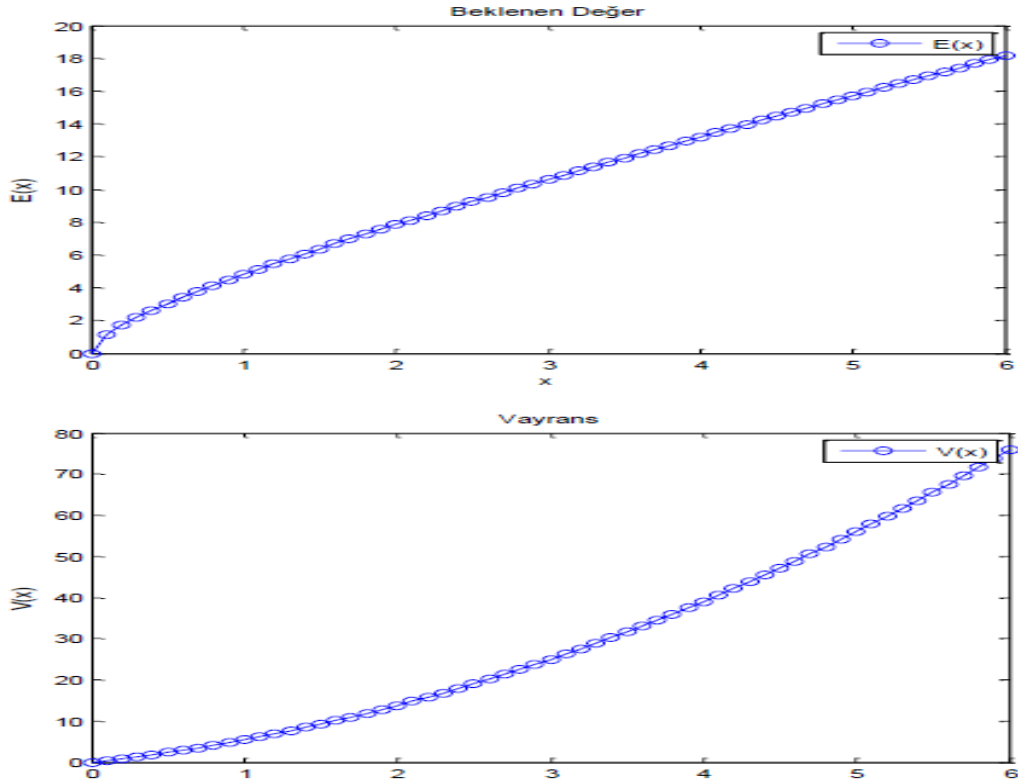
$$= Var[A\sqrt{x}] + Var[A0.6x]$$

$$= xVar[A] + (0.6)^2x^2Var[A]$$

$$= x\sigma^2 + 0.36x^2\sigma^2$$

$$= (x + 0.36x^2)\sigma^2$$

olarak hesaplanır. Özel olarak $\sigma^2 = 4$ değeri için $Var[u(x)] = (x + 0.36x^2)4$ olarak hesaplanır.



Şekil 3. 2. Rastgele VİM ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikler

Örnek 3.3: Aşağıdaki rastgele lineer fredholm integral denkleminin çözümünü VİM yöntemi ile yapınız.

$$u(x) = Ae^{4x} - \frac{1}{16}(3e^4 + 1)Ax + \int_0^1 xtu(t)dt \quad (3.11)$$

$A \sim U(\alpha, \beta)$ düzgün dağılımına sahip rastgele değişken.

Çözüm:

(3.8)'deki iterasyon formülüne göre bu örnek aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x [u'_n(s) - 4Ae^{4x} + \frac{A}{16}(3e^4 + 1) - \int_0^1 tu_n(t)dt]ds$$

$$u_0(x) = Ae^{4x} - \frac{A}{163^0}(3e^4 + 1)x$$

$$u_1(x) = Ae^{4x} - \frac{A}{163^1}(3e^4 + 1)x$$

$$u_2(x) = Ae^{4x} - \frac{A}{163^2}(3e^4 + 1)x$$

$$u_3(x) = Ae^{4x} - \frac{A}{163^3}(3e^4 + 1)x$$

.

.

.

$$u_n(x) = Ae^{4x} - \frac{A}{163^n}(3e^4 + 1)x$$

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} Ae^{4x} - \frac{A}{163^n}(3e^4 + 1)x = Ae^{4x}$$

olarak bulunur. Bulduğumuz sonucun beklenen değer ve varyansını hesaplayalım.

Beklenen değeri;

$$E[u(x)] = E[Ae^{4x}] = e^{4x}E[A] = \frac{e^{4x}}{2}(\alpha + \beta)$$

$\alpha = 1$ ve $\beta = 2$ özel değerleri için $A \sim U(1,2)$ beklenen değerini hesaplırsak

$$E[u(x)] = \frac{e^{4x}}{2} (2 + 1) = \frac{3}{2} e^{4x}$$

olarak hesaplanır.

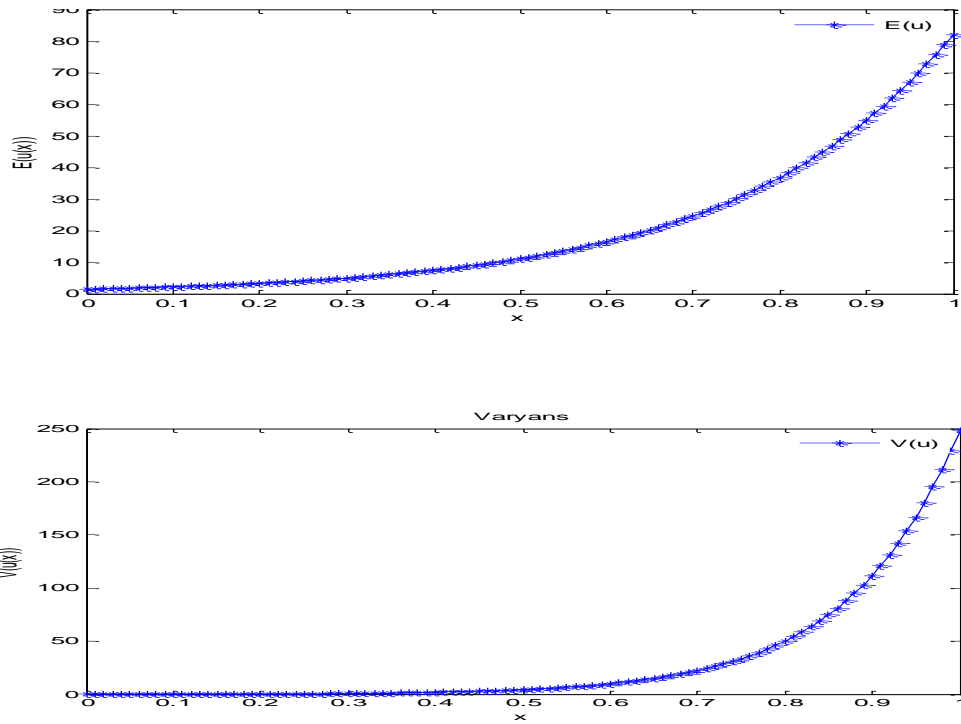
Varyansını hesaplırsak;

$$Var[u(x)] = V[Ae^{4x}] = e^{8x} V[A] = e^{8x} \left[\frac{(\beta - \alpha)^2}{12} \right]$$

$\alpha = 1$ ve $\beta = 2$ özel değerleri için $A \sim U(1,2)$ varyansını hesaplırsak

$$Var[u(x)] = \frac{e^{8x}}{12}$$

olarak hesaplanır.



Şekil 3. 3. Lineer iterasyon yönteminde elde edilen çözümün beklenen değeri ve varyansı

Örnek 3.4: Aşağıdaki rastgele lineer fredholm integral denkleminin çözümünü yapınız.

$$u(x) = \frac{7A}{8}x + \frac{1}{2A} \int_0^1 xtu^2(t)dt \quad A \sim N(\mu, \sigma^2) \quad (3.12)$$

Çözüm:

(3.8)'deki iterasyon formülüne göre bu örnek aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x (u_n'(s) - \frac{7A}{8} - \frac{1}{2A} \int_0^1 tu_n^2(t)dt)ds$$

$$u_1(x) = \frac{497}{512}Ax = 0.970703125Ax$$

$$u_2(x) = \frac{2082017}{2097152}Ax = 0.99278307Ax$$

$$u_3(x) = \frac{35121120366017}{35184372088832}Ax = 0.998220228Ax$$

$$u_4(x) = \frac{98990733707661916016342313857}{99035203142283042199192993792}Ax = 0.99955097Ax$$

.

.

.

$$n \rightarrow \infty \quad u_n(x) \rightarrow u(x) = Ax$$

Bulduğumuz sonucun beklenen değer ve varyansını hesaplayalım.

Beklenen değeri;

$$E[u(x)] = E[Ax] = xE[A] = x\mu$$

olarak hesaplanır.

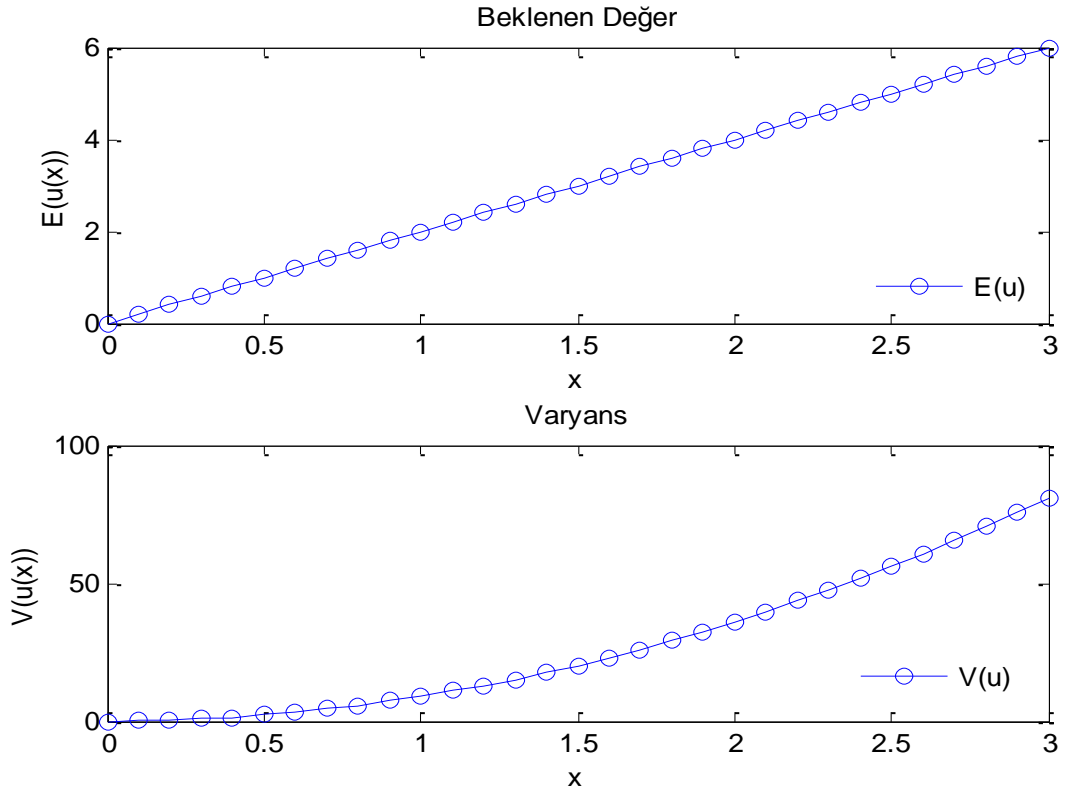
Varyansını hesaplarsak;

$$Var[u(x)] = Var[Ax] = x^2Var[A] = x^2\sigma^2$$

olarak hesaplanır.

$\mu = 2, \sigma = 3$ özel değerleri için beklenen değer ve varyansın grafikleri

$$E[u(x)] = 2x, Var[u(x)] = 9x^2$$



Şekil 3. 4: Rastgele VİM ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri

3.2. Rastgele Sumudu Dönüşüm Yöntemi

Mühendislikte, astronomide fizikte kullanılan birçok integral dönüşümü vardır. Bunlardan bir tanesi de sumudu dönüşümüdür.

Tanımı aşağıdaki gibidir.

A bir fonksiyonlar kümesi;

$$A = \left\{ f(t) : \exists M, \tau_1, \tau_2 > 0, |f(t)| < M^{\frac{|t|}{\tau_j}} \middle| t \in (-1)^j \times [0, \infty) \right\} \quad (3.13)$$

olmak üzere

$$S[f(t)] = F(u) = \int_0^\infty e^{-t} f(ut) dt, u \in (-\tau_1, \tau_2) \quad (3.14)$$

$$S[f(t)] = F(u) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{u}\right) e^{\frac{-t}{u}} f(t) dt \quad (3.15)$$

Şeklinde tanımlanmaktadır. (3.13) eşitliği verilen herhangi bir diferansiyel denkleme uygulanarak $F(u)$ sumudu dönüşümü elde edilmiş olur. Bu dönüşümün ters sumudu dönüşümü

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F\left(\frac{1}{s}\right) \frac{ds}{s} \quad (3.16)$$

olarak tanımlanır (Watugala, 1993).

Bu integralin hesabı zor olduğundan uygulamada daha önceden hazırlanmış olan dönüşüm tablolarından yararlanılabilir. (3.14) denkleminde (3.16) ters sumudu dönüşümü uygulanırsa sumudu dönüşümü metoduyla verilen denklemin çözümü elde edilmiş olur.

Tablo 1.1. Sumudu Tablosu Dönüşüm

| | $f(t)$ | $G(u)=s(f(t))$ |
|----|---|----------------------------------|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | t | u |
| 3 | e^{at} | $\frac{1}{1-au}$ |
| 4 | $\cos at$ | $\frac{1}{1+a^2u^2}$ |
| 5 | $\sin at$ | $\frac{au}{1+a^2u^2}$ |
| 6 | $\frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!}, n = 1, 2, \dots$ | u^{n-1} |
| 7 | $\frac{\sin at}{a}$ | $\frac{u}{1+a^2u^2}$ |
| 8 | $\frac{e^{at}\sin at}{a}$ | $\frac{u}{(1-bu)^2 + a^2u^2}$ |
| 9 | $e^{bt}\cos at$ | $\frac{1-bu}{(1-bu)^2 + a^2u^2}$ |
| 10 | $\frac{\sinh at}{a}$ | $\frac{u}{1-a^2u^2}$ |
| 11 | $\cosh at$ | $\frac{1}{1-a^2u^2}$ |

Teorem 3.1. $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının sumudu dönüşümü sırasıyla $F(s)$ ve $G(s)$ olsun.

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (3.17)$$

$h(t)$ 'nin sumudu dönüşümü;

$$s[h(t)] = uF(u)G(u) \text{ dir.} \quad (3.18)$$

şeklindedir (Asiru, 2010).

Örnek 3.5.

$$Asin(3x) = \int_0^x (t - x)h(t)dt \quad (3.19)$$

$A \sim U(1,4)$ düzgün dağılıma sahip rastgele değişken olsun. Verilen volterra integral denkleminin sumudu dönüşüm yöntemiyle çözüm davranışlarını inceleyiniz.

Çözüm:

(3.19) denkleminin sumudu dönüşümü uygulanırsa

$$s[Asin(3x)] = s\left[\int_0^x (t - x)h(t)dt\right] \quad (3.20)$$

$$= A \frac{3v}{1+9v^2} = s[-x * h(x)] = -vvH(v)$$

$$= -v^2H(v) = \frac{3Av}{1+v^2}$$

$$H(v) = \frac{-3A}{v(1+9v^2)}$$

$$H(v) = \frac{-3A}{v} + \frac{27Av}{1+9v^2} \quad (3.21)$$

(3.21) denkleminin ters sumudu dönüşümü uygulanırsa

$$h(x) = s^{-1}[H(v)] = s^{-1}\left[\frac{-3A}{v} + \frac{27Av}{1+9v^2}\right]$$

$$h(x) = -3A\delta(x) + 9Asin(3x) \quad (3.22)$$

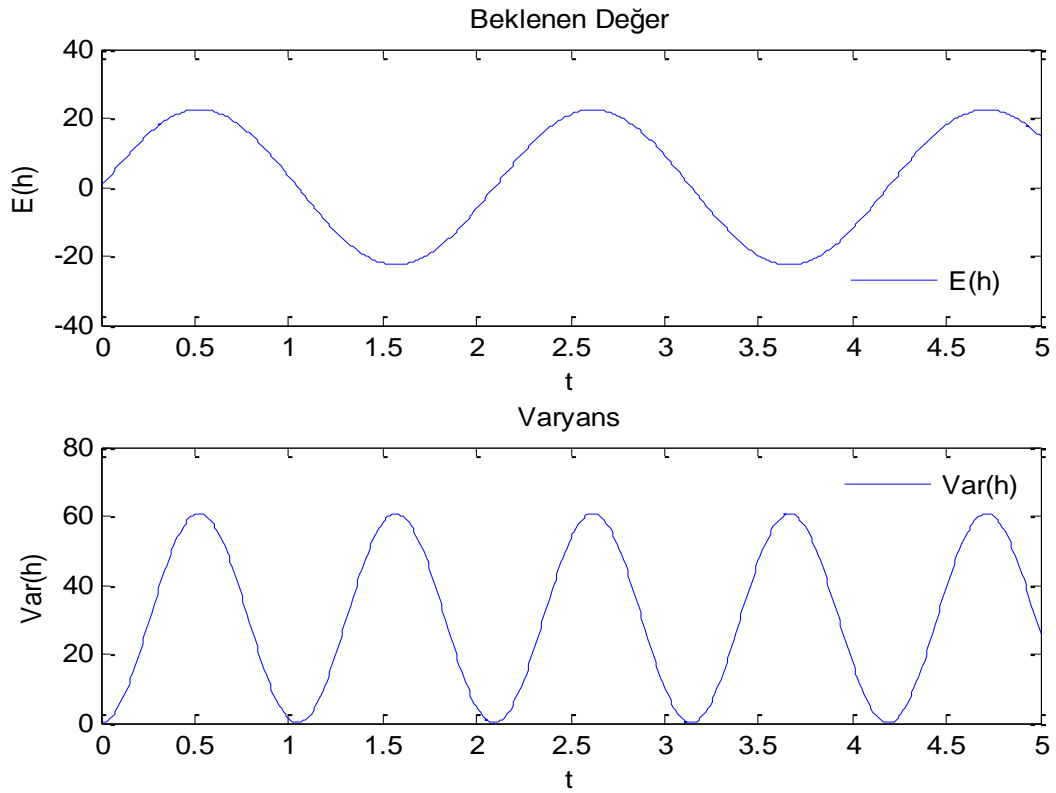
(3.22) denkleminin beklenen değerini ve varyansını hesaplayalım.

$$E[h(x)] = -3\delta(x)E[A] + 9A\sin(3x)E[A]$$

$$= -3\delta(x)\frac{5}{2} + 9\sin(3x)\frac{5}{2}$$

$$Var[h(x)] = 9\delta^2(x)Var[A] + 81A\sin^2(3x)Var[A]$$

$$= 9\delta^2(x)\frac{9}{12} + 81A\sin^2(3x)\frac{9}{12} \quad (3.23)$$



Şekil 3. 5. Rastgele sumudu dönüşümü ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri

Örnek 3.6.

$$h(x) = Ax + B + \int_0^x \sin(x-t)h(t)dt \quad (3.24)$$

Sırasıyla $A \sim N(3,1)$ $B \sim U(4,6)$ normal ve düzgün dağılıma sahip rastgele değişken olsun. Verilen volterra integral denkleminin sumudu dönüşüm yöntemiyle çözüm davranışlarını inceleyiniz.

Çözüm: (3.24) denkleminin sumudu dönüşümü uygulanırsa

$$s[h(x)] = s[Ax + B] + s\left[\int_0^x h(t)\sin(x-t)dt\right] \quad (3.25)$$

$$H(v) = Av + B + vH(v) \frac{v}{1+v^2}$$

$$H(v)\left(1 - \frac{v^2}{1+v^2}\right) = Av + B$$

$$H(v)\left(\frac{1}{1+v^2}\right) = Av + B$$

$$H(v) = Av^3 + Bv^2 + Av + B \quad (3.26)$$

(3.26) denkleminin ters sumudu dönüşümü uygularsak;

$$h(x) = s^{-1}[H(v)] \quad (3.27)$$

$$= A \frac{x^3}{3!} + B \frac{x^2}{2!} + Ax + B \quad (3.28)$$

(3.28) denkleminin beklenen değer ve varyansını hesaplırsak;

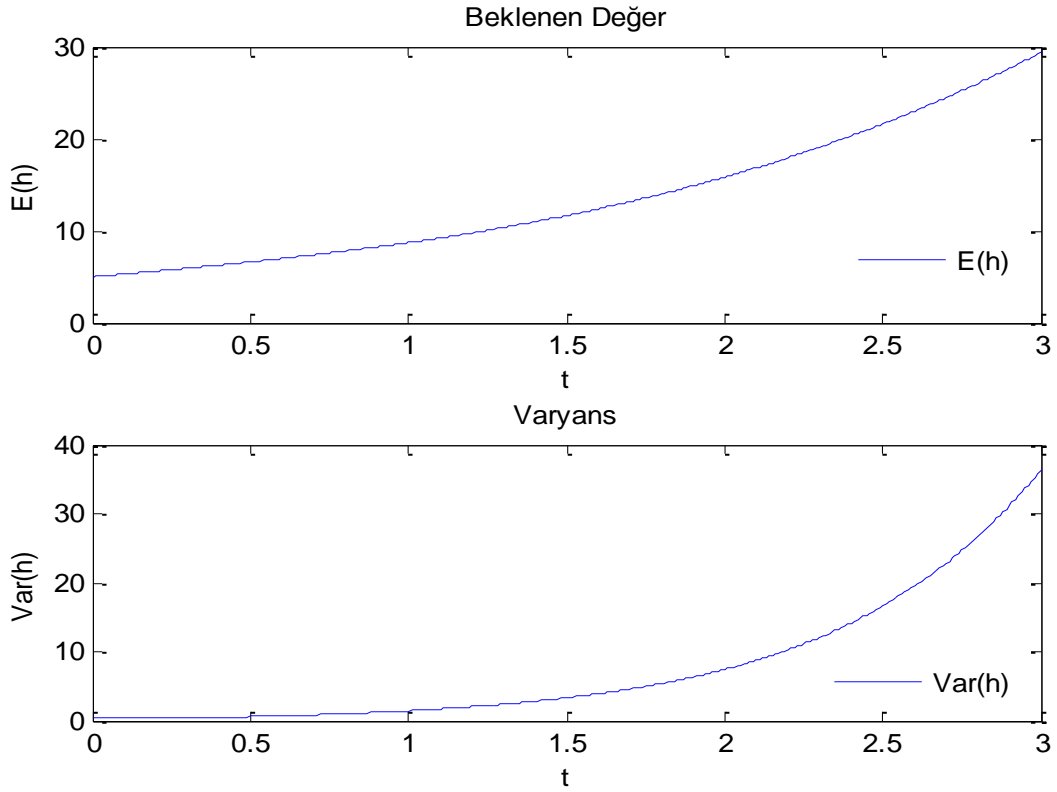
$$E[h(x)] = E[A] \frac{x^3}{6} + E[B] \frac{x^2}{2} + E[A]x + E[B]$$

$$= \frac{3x^3}{6} + \frac{5x^2}{2} + 3x + 5$$

$$Var[h(x)] = Var[A] \frac{x^6}{3^6} + Var[B] \frac{x^4}{4} + Var[A]x^2 + Var[B]$$

$$= \frac{x^6}{3^6} + \frac{x^4}{12} + x^2 + \frac{1}{2}$$

olarak bulunur.



Şekil 3.6. Rastgele sumudu dönüşümü ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri

Örnek 3.7.

$$h(x) = Ax + B + \int_0^x (t - x)h(t)dt \quad (3.29)$$

Sırasıyla $A \sim \text{Beta}(4,5)$ $B \sim \text{Gamma}(3,4)$ dağılımlarına sahip rastgele değişkenler olsun.

Verilen volterra integral denkleminin sumudu dönüşüm yöntemiyle çözüm davranışlarını inceleyiniz.

Çözüm:

(3.29) denkleminin sumudu dönüşümü uygulanırsa

$$s[h(x)] = s[Ax + B] + s\left[\int_0^x (t - x)h(t)dt\right] \quad (3.30)$$

$$H(v) = Av + B - vvH(v)$$

$$H(v)(1 + v^2) = Av + B$$

$$H(v) = \frac{Av}{1+v^2} + \frac{B}{1+v^2} \quad (3.31)$$

(3.31) denklemine ters sumudu dönüşümü uygularsak;

$$h(x) = s^{-1}[H(v)] = A\sin(x) + B\cos(x) \quad (3.32)$$

(3.32) denkleminin beklenen değer ve varyansını hesaplırsak;

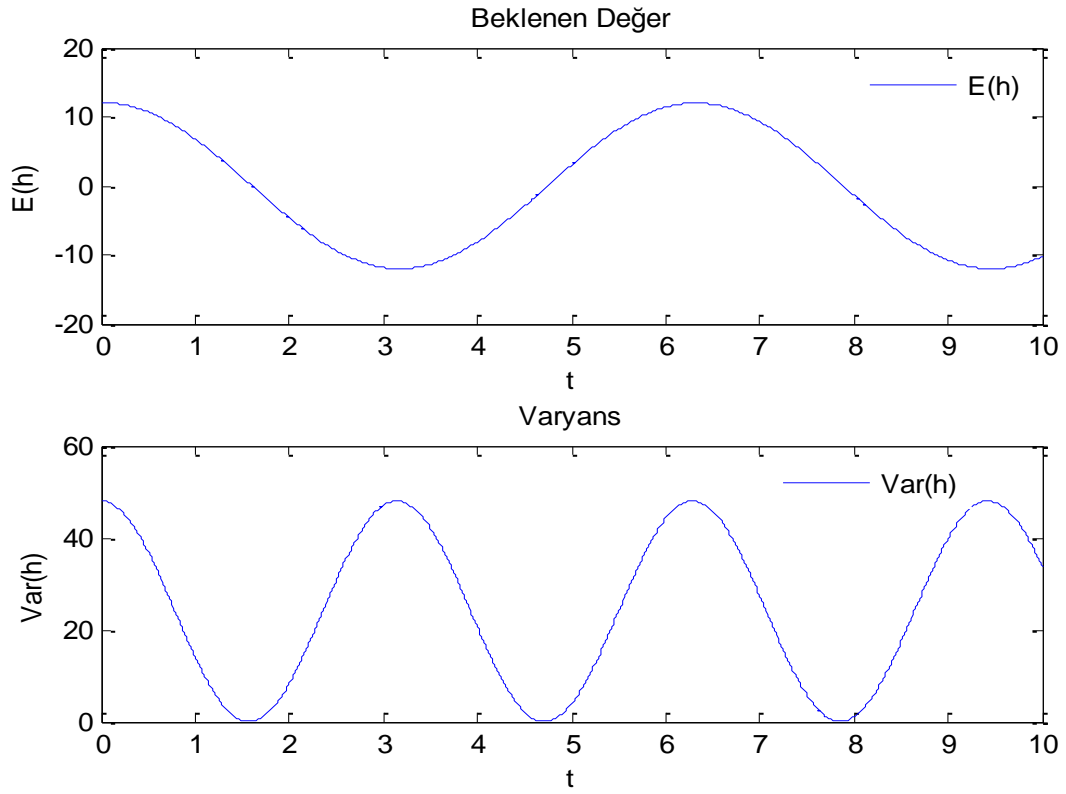
$$E[h(x)] = E[A]\sin(x) + E[B]\cos(x)$$

$$= \frac{4}{9}\sin(x) + 12\cos(x)$$

$$Var[h(x)] = Var[A]\sin^2(x) + Var[B]\cos^2(x)$$

$$= \frac{2}{81}\sin^2(x) + 48\cos^2(x)$$

olarak bulunur.



Şekil 3.7. Rastgele sumudu dönüşümü ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri

Örnek 3.8.

$$u''(x) = A + \int_0^x (x-t) A \cosh(t) dt \quad (3.34)$$

$A \in \sim G(\alpha, \beta)$ Gamma dağılımına sahip bir rastgele değişken olmak üzere, $u(0) = a, u'(0) = 0$ başlangıç koşullarını kullanarak 2. Mertebeden volterra-integro denklemini sumudu dönüşüm metodu yardımıyla çözelim.

Çözüm:

$$u''(x) = A + \int_0^x (x-t) u(t) dt \quad (3.35)$$

denklemin de her iki tarafın sumudu dönüşümü uygulanırsa

$$S[u''(x) = A + \int_0^x (x-t) u(t) dt]$$

$$\begin{aligned}
\frac{U(v)}{v^2} - \frac{U(0)}{v^2} - \frac{U'(0)}{v} &= A + S[x * u(x)] \\
&= A + vS[x]S[u(x)] \\
&= A + vvU(v)
\end{aligned}$$

$$\frac{U(v)}{v^2} - \frac{A}{v^2} = A + v^2U(v)$$

$$U(v) \left[\frac{1}{v^2} - v^2 \right] = A \left[1 + \frac{1}{v^2} \right]$$

$$U(v) \left[\frac{1 - v^4}{v^2} \right] = A \left[\frac{v^2 + 1}{v^2} \right]$$

$$U(v) = \frac{A}{1-v^2} \quad (3.36)$$

burada ters sumudu dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
U(x) &= S^{-1}[u(v)] \\
&= A \cosh(x)
\end{aligned} \quad (3.37)$$

elde edilir. Bulduğumuz sonucun beklenen değer ve varyansını hesaplayalım.

Beklenen değeri;

$$E[U(x)] = E[A \cosh(x)] = \cosh(x)E[A] = \alpha\beta \cosh(x)$$

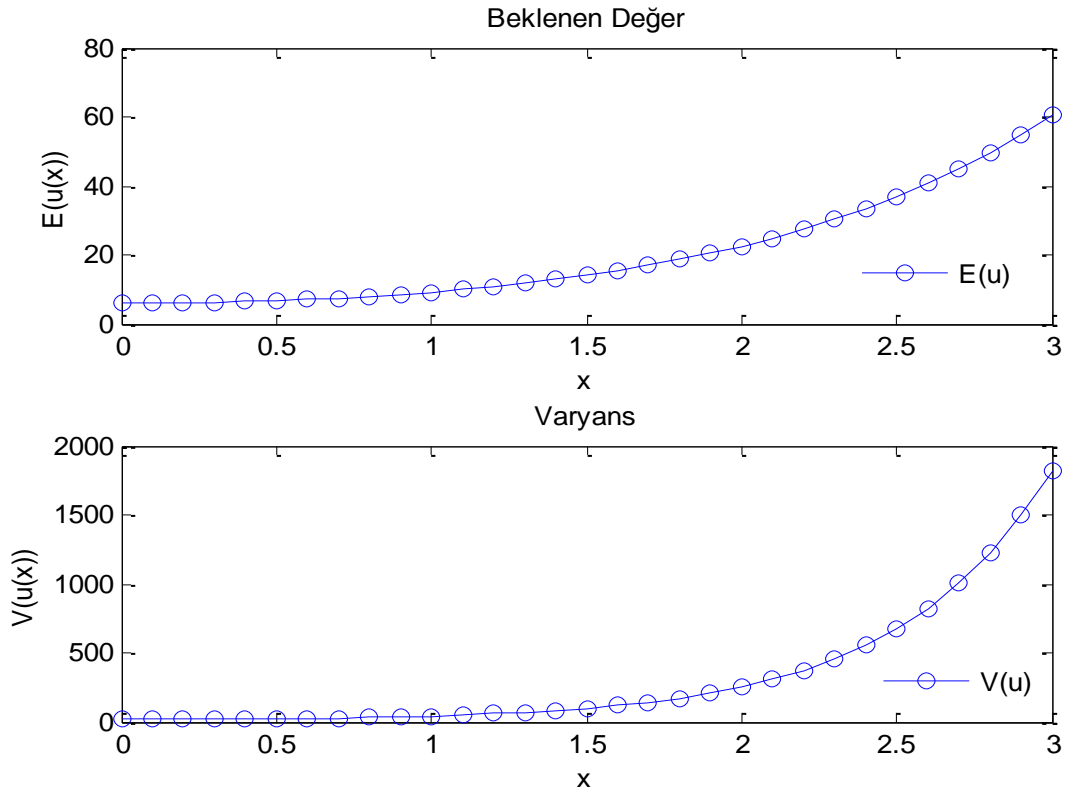
$$E[U(x)] = \alpha\beta \cosh(x)$$

$$Var[U(x)] = V[A \cosh(x)] = \cos^2 h(x) Var[A]$$

$$\alpha\beta^2 \cos^2 h(x)$$

$\alpha = 2, \beta = 3$ özel değerleri için beklenen değer ve varyansın grafikleri

$$E[u(x)] = 6 \cosh(x), Var[u(x)] = 18 \cos^2 h(x)$$



Şekil 3. 8: Rastgele sumudu dönüşümü ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri

3.3. Rastgele Elzaki Dönüşüm Yöntemi

Tanım 3.3.1. $A = \{f(t) | \exists M, k_1, k_2 > 0 \text{ öyleki } |f(t)| < Me^{\frac{|t|}{k_j}}, eğert } \in (-1)^j \times [0, \infty)\}$ olmak üzere A sınıfına ait fonksiyonların Elzaki dönüşümü $E[f(t)] = f(u)$ olarak tanımlanır ve aşağıdaki gibi ifade edilir (Watugala, 1998).

$$T(u) = u^2 \int_0^\infty f(u) e^{-\tau} d\tau, \quad k_1, k_2 > 0 \quad (3.38)$$

ya da eşdeğer olarak

$$E(f(t)) = T(u) = u \int_0^\infty f(t) e^{-\frac{\tau}{u}} d\tau, \quad u \in (k_1, k_2) \quad (3.39)$$

- 1) $E(f'(t)) = \frac{T(u)}{u} - uf(0)$
- 2) $E(f''(t)) = \frac{T(u)}{u^2} - f(0) - uf'(0)$
- 3) $E(t.f'(t)) = u^2 \frac{d}{du} \left[\frac{T(u)}{u} - uf(u) \right] - u \left[\frac{T(u)}{u} - uf(0) \right]$

$$4) E(t^2 f'(t)) = u^4 \frac{d^2}{du^2} \left[\frac{T(u)}{u} - u f(0) \right]$$

$$5) E(\sin at) = \frac{au^3}{1+a^2 u^2}$$

$$6) E(\sin t) = \frac{u^3}{1+u^2}$$

$$7) E(t) = u^3$$

$$8) E(t^n) = n! u^{n+2}$$

$$9) E^{-1}[u^{n+2}] = \frac{t^n}{n!}$$

Teorem 3.2. (Elzaki dönüşümü için konvolüsyon teoremi)

$E(f * g) = \frac{1}{u} E(f)E(g)$ için $E(f)$ in Elzaki dönüşümü f tir.

$$\textbf{İspat: } E(f)E(g) = u^2 \int_0^\infty f(\tau) e^{-\frac{\tau}{u}} d\tau \cdot \int_0^\infty g(v) e^{-\frac{v}{u}} dv \quad (3.40)$$

$t = v + \tau, v = t - \tau$ olarak yazarsak

$$E(g) = \int_\tau^\infty g(t - \tau) e^{-\frac{t-\tau}{u}} dt \quad (3.41)$$

$$= e^{\frac{\tau}{u}} \int_\tau^\infty g(t - \tau) e^{-\frac{t}{u}} dt \quad (3.42)$$

Böylece

$$\begin{aligned} (3.40) &= u^2 \int_0^\infty f(\tau) e^{-\frac{\tau}{u}} d\tau \cdot \int_0^\infty g(v) e^{-\frac{v}{u}} dv = u^2 \int_0^\infty f(\tau) e^{-\frac{\tau}{u}} \cdot e^{\frac{\tau}{u}} \int_\tau^\infty g(t - \tau) e^{-\frac{t}{u}} dt d\tau \\ &= u^2 \int_0^\infty f(\tau) \int_\tau^\infty g(t - \tau) e^{-\frac{t}{u}} dt d\tau \\ &= u^2 \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{u}} \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau dt \\ &= u^2 \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{u}} (f * g)(t) dt \\ &= u E(f * g) \end{aligned} \quad (3.43)$$

şeklinde ispatı tamamlarız.

$$\textbf{Örnek 3.9.} \quad y(t) - \int_0^t y(\tau) \cdot \sin(t - \tau) d\tau = At \quad (3.44)$$

$A \in \sim G(p, q)$ geometrik dağılıma sahip rastgele değişken olmak üzere ikinci tür rastgele volterra denkleminin çözümünü Elzaki dönüşüm yöntemiyle elde ederek çözüm davranışlarını inceleyelim.

$$E(f * g) = \frac{1}{u} E(f)E(g) \text{ laplace dönüşümünün tam çözümü}$$

$$y(t) - y * \sin t = At \quad (3.45)$$

(3.45) ifadesine Elzaki dönüşümü uygulanırsa,

$$E(y(t) - y * \sin t) = E(At)$$

$$Y(u) - \frac{1}{u} Y(u) \frac{u^3}{1 + u^2} = Au^3$$

$$Y(u) \left(1 - \frac{u^2}{1 + u^2}\right) = Au^3$$

$$Y(u) \frac{1}{1+u^2} Au^3 \quad (3.46)$$

$Y(u) = Au^3 + Au^5$ ters Elzaki dönüşümü uygulanırsa

$$y(t) = E^{-1}(Au^3 + Au^5) = AE^{-1}[u^3] + AE^{-1}[u^5] \quad (3.47)$$

$$y(t) = A \cdot \frac{t}{1!} + A \frac{t^3}{3!} \text{ çözümü elde edilir.}$$

Rastgele Elzaki dönüşümü ile rastgele volterra integral denkleminin yaklaşık çözümlerinin sayısal karakteristikleri aşağıdaki hesaplamalar yardımı ile elde edilebilir.

$$E[y(t)] = \sum_{u=0}^n E[Y(u)]t^u \quad (3.48)$$

$$\text{Var}[y(t)] = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \cos(Y(i), Y(j)) t^{i+j} \quad (3.49)$$

Rastgele değişken daha yüksek momentleri yaklaşık beklenen değer ve varyansın hesabı için gereklidir. Geometrik dağılıma sahip X rastgele değişkeninin parametreleri, $X \sim$

$G(p, q)$ dir. Geometrik dağılımın moment çıkaran fonksiyonundan (Feller, 1968) faydalanarak

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{pe^t}{1-qe^t}. \quad (3.50)$$

$X \sim G(p, q)$ rastgele değişkeninin birinci momenti ve varyansı

$$E[X] = \frac{1}{p}, Var[X] = \frac{q}{p^2} \quad (3.51)$$

bulunur.

Yardımla ilk iki moment ve varyansı hesaplanabilir.

$$E[x] = \frac{1}{p}, Var(x) = \frac{q}{p^2} \text{ bu sonuçları kullanarak}$$

Beklenen değer ;

$$E[Y(t)] = E\left[At + A\frac{t^3}{6}\right] = E[A]t + E[A]\frac{t^3}{6} = E[A]\left[t + \frac{t^3}{6}\right] \quad (3.52)$$

$$E[Y(t)] = \frac{1}{p}\left[t + \frac{t^3}{6}\right]$$

Varyans ;

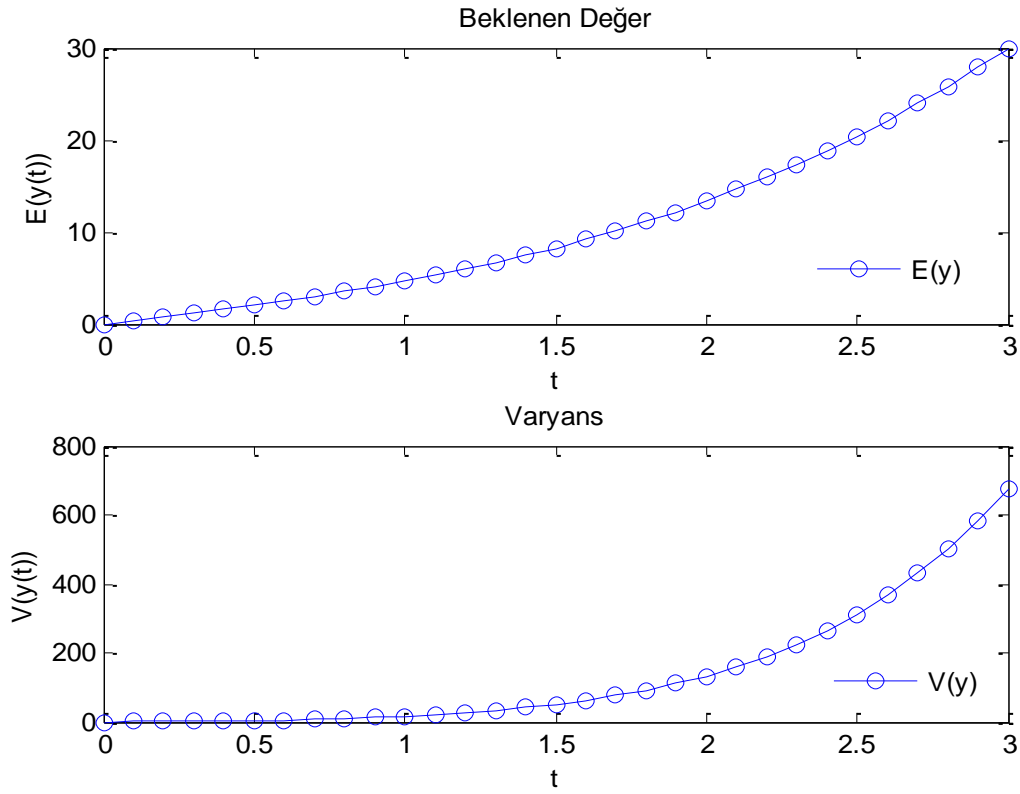
$$Var[y(t)] = E[y(t)^2] - E[y(t)]^2$$

$$= Var(A) \left[t + \frac{t^3}{3}\right]^2$$

$$Var[y(t)] = \frac{q}{p^2} \left[t + \frac{t^3}{3}\right]^2$$

$p = \frac{1}{4}, q = \frac{3}{4}$ özel değerleri için beklenen değer ve varyansın grafikleri

$$E[y(t)] = 4\left[t + \frac{t^3}{6}\right], Var[y(t)] = 12\left[t + \frac{t^3}{3}\right]^2$$



Şekil 3. 9. Rastgele Elzaki dönüşüm yöntemi ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri

Örnek 3.10. $\int_0^t y(\tau) \cos(t - \tau) d\tau = \frac{At^2}{2}, A \sim N(\mu, \sigma^2)$ (3.53)

rastgele 1. Tip volterra integral denklemini Elzaki dönüşümü uygulayarak çözümlerini yapalım.

$$\frac{1}{u} Y(u) \left(\frac{u^2}{1+u^2} \right) = \frac{A}{2} 2! u^4$$

$$u \frac{Y(u)}{1+u^2} = Au^4$$

$Y(u) = A(u^3 + u^5)$ bu fonksiyona ters Elzaki dönüşümü uygulanırsa;

$$\begin{aligned} E^{-1}(Y(u)) &= y(t) = E^{-1}(Au^3 + Au^5) \\ &= At + \frac{At^3}{6} \end{aligned}$$

Beklenen değer ;

$$E[y(t)] = E\left[At + A\frac{t^3}{6}\right] = E[A]t + E[A]\frac{t^3}{6} = E[A]\left[t + \frac{t^3}{6}\right]$$

$$E[y(t)] = \mu\left[t + \frac{t^3}{6}\right]$$

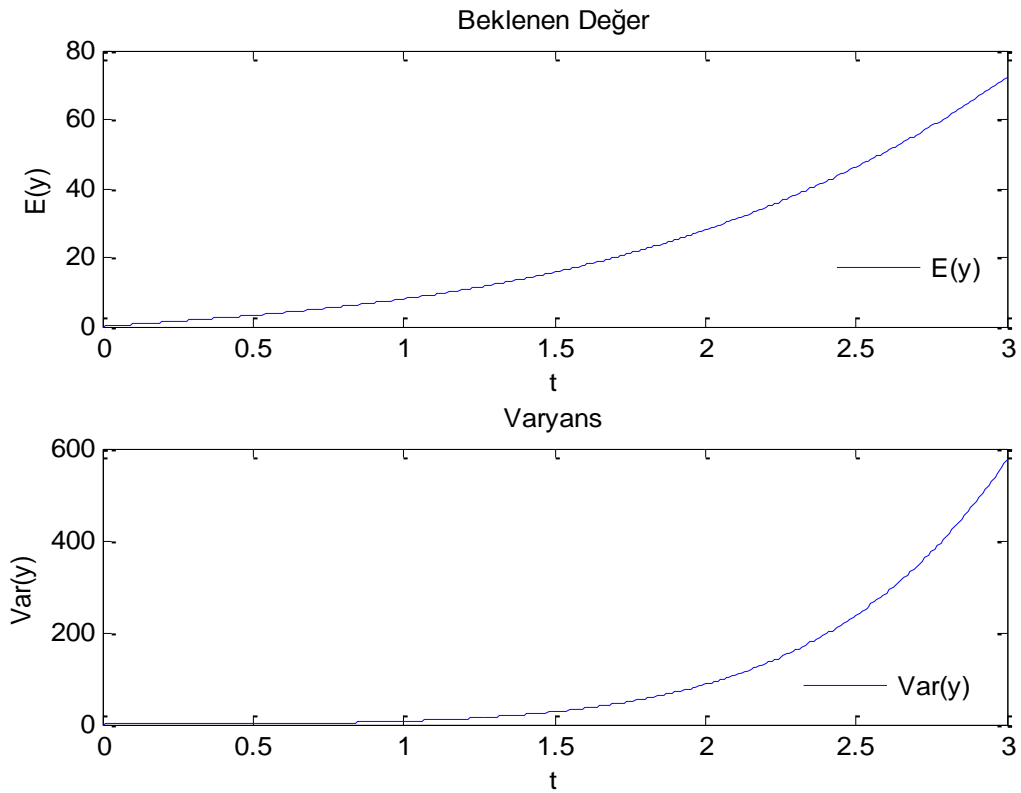
Varyans ;

$$Var[y(t)] = E[y(t)^2] - E[y(t)]^2$$

$$= Var(A)\left[t + \frac{t^3}{6}\right]^2$$

$$Var[y(t)] = \sigma^2\left[t + \frac{t^3}{6}\right]^2$$

$\mu = 6, \sigma^2 = 4$ özel değerleri için beklenen değer ve varyansın grafikleri



Şekil 3.10. Rastgele Elzaki dönüşüm yöntemi ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri

Örnek 3.11. $y(t) - \int_0^t y(\tau)e^{(t-\tau)}d\tau - At = 0$ (3.54)

Burada $A \sim B(\alpha = 2, \beta = 3)$ beta dağılımına sahip rastgele değişken için 2. Tip volterra integral denklemini Elzaki dönüşümü uygulayarak çözümlerini yapalım.

Çözüm: (3.54) denklemine Elzaki dönüşümü uygulanırsa

$$y(t) - y(t) * e^t - At = 0$$

$$Y(u) \left(1 - \frac{u}{1-u}\right) = Au^3$$

$$Y(u) \left(\frac{1-2u}{1-u}\right) = Au^3$$

$$Y(u) = \frac{Au^3 - Au^4}{1-2u}$$

$$Y(u) = \frac{A}{2}u^3 - \frac{A}{4}u^2 + \frac{\frac{A}{4}u^2}{1-2u}$$

denkleme ters Elzaki dönüşümü uygularsak;

$$Y(t) = E^{-1}(Y(u)) = \frac{At}{2} - \frac{A}{4} + \frac{A}{4}e^{2t} \text{ tam çözümü elde edilir.}$$

Beklenen değer ;

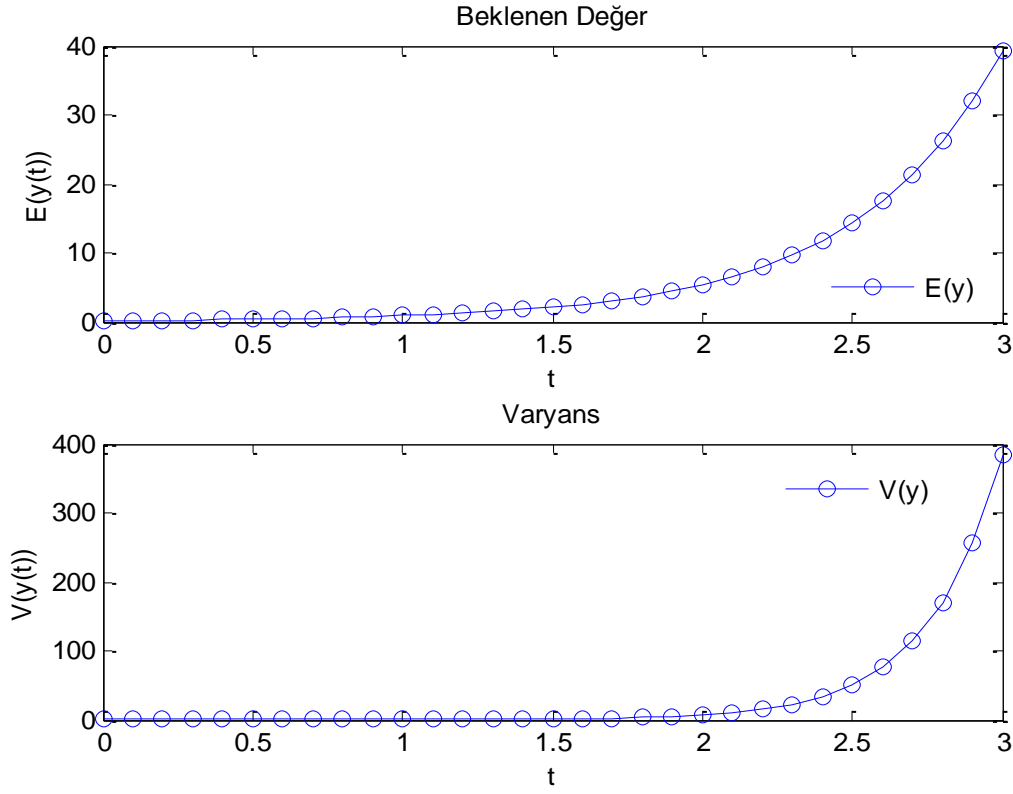
$$E[Y(t)] = E\left[\frac{At}{2} - \frac{A}{4} + \frac{Ae^{2t}}{4}\right] = E[A]\frac{t}{2} - E[A]\frac{t^3}{6} + E[A]\frac{e^{2t}}{4} = E[A]\left[\frac{t}{2} - \frac{t^3}{6} + \frac{e^{2t}}{4}\right]$$

$$E[Y(t)] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left[\frac{t}{2} - \frac{t^3}{6} + \frac{e^{2t}}{4}\right]$$

Varyans;

$$Var[Y(t)] = Var\left[\frac{At}{2} - \frac{A}{4} + \frac{Ae^{2t}}{4}\right] = Var(A)\left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{e^{2t}}{4}\right]$$

$$= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{e^{2t}}{4}\right]^2$$



Şekil 3.11. Rastgele Elzaki dönüşüm yöntemi ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri

Örnek 3.12. $y(t) = At + \frac{1}{6} \int_0^t y(\tau)(t - \tau)^3 d\tau$ (3.55)

burada $X \sim G(\alpha, \beta)$ gamma dağılımına sahip rastgele değişken için volterra integral denklemini Elzaki dönüşümü uygulayarak çözümlerini yapalım.

Çözüm: (3.55) denklemine Elzaki dönüşümü uygulanırsa

$$y(t) = At + \frac{1}{6} y * t^3$$

$$Y(u) = Au^3 + u^4 Y(u)$$

$$Y(u)(1 - u^4) = Au^3$$

$$Y(u) = \frac{Au^3}{1 - u^4} = Au^3 \left[\frac{B_1}{1 - u^2} + \frac{B_2}{1 + u^2} \right]$$

$$Y(u) = \frac{A}{2} \left[\frac{u^3}{1 - u^2} + \frac{u^3}{1 + u^2} \right] \text{denklemine ters Elzaki dönüşümü uygulanırsa}$$

$y(t) = \frac{A}{2} \sinh t + \frac{A}{2} \sinh t$ tam çözümü elde edilir.

Gamma dağılıma sahip X rastgele değişkeninin parametreleri, $X \sim G(\alpha, \beta)$ dir. Gamma dağılımının moment çıkaran fonksiyonundan faydalanarak

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha}.$$

$X \sim G(\alpha, \beta)$ rastgele değişkeninin birinci momenti ve varyansı

$$E[X] = \alpha\beta, \text{Var}[X] = \alpha\beta^2$$

bulunur.

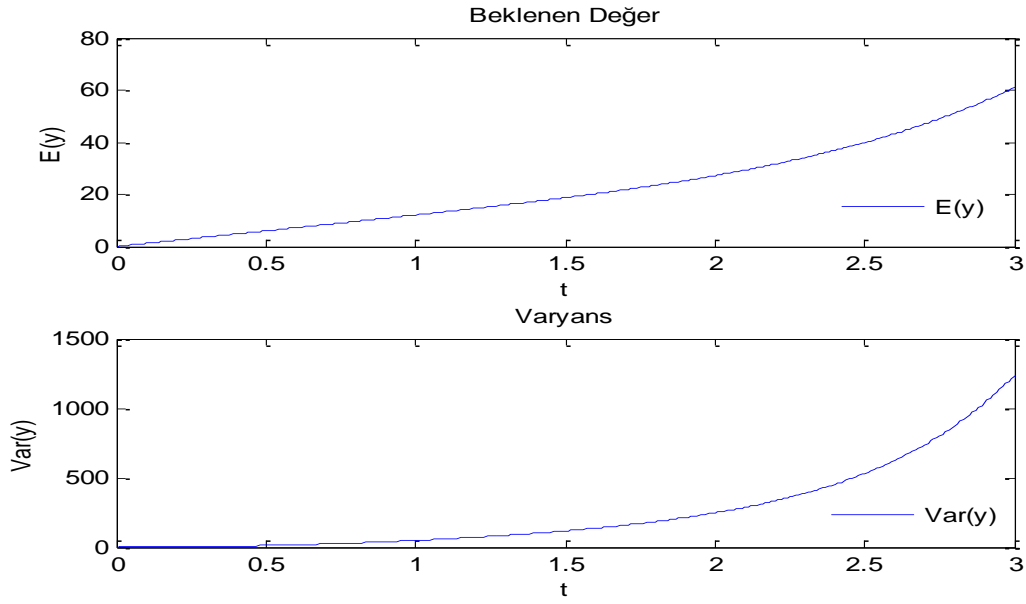
Beklenen değer;

$$\begin{aligned} E[y(t)] &= E\left[\frac{A \sinh t}{2} + \frac{A \sinh t}{2}\right] \\ &= \frac{\sinh t}{2} E[A] + \frac{\sinh t}{2} E[A] \\ &= E[A] \left[\frac{\sinh t}{2} + \frac{\sinh t}{2}\right] \\ &= \frac{E[A]}{2} [\sinh t + \sinh t] \\ &= \frac{\alpha\beta}{2} [\sinh t + \sinh t] \end{aligned}$$

Varyans;

$$\begin{aligned} \text{Var}[y(t)] &= \text{Var}\left[\frac{A \sinh t}{2} + \frac{A \sinh t}{2}\right] = \text{Var}(A) \left[\frac{\sinh t}{2} + \frac{\sinh t}{2}\right]^2 \\ &= \text{Var}(A) \left[\frac{\sinh t}{2} + \frac{\sinh t}{2}\right]^2 \\ &= \frac{\alpha\beta^2}{4} [\sinh t + \sinh t]^2 \end{aligned}$$

$\alpha = 3, \beta = 4$ özel değerleri için , $A \sim G(\alpha = 3, \beta = 4)$ olmak üzere, beklenen değer ve varyans, $E[y(t)] = 6[\sinh t + \sinh t], \text{Var}(y(t)) = 12[\sinh t + \sinh t]^2$



Şekil 3.12. Rastgele Elzaki dönüşüm yöntemi ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri

3.4. Lineer Diferansiyel Denklemler ile Volterra İntegral Denklemleri Arasındaki İlişki

$a_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) katsayıları sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) y = F(x) \quad (3.56)$$

lineer diferansiyel denkleminin

$$y(0) = C_0, y'(0) = C_1, \dots, y^{n-1}(0) = C_{n-1}$$

başlangıç koşullarını gerçekleyen çözümü, ikinci çeşit bir Volterra integral denkleminin çözümüne indirgenebilir.

Bu söylediklerimizi ikinci mertebeden bir lineer diferansiyel denklem üzerinde gerçekleyerek konuya açıklık getirelim.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x) y = F(x) \quad (3.57)$$

$$y(0) = C_0, y'(0) = C_1 \quad (3.58)$$

olsun.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mu(x) \quad (3.59)$$

diyelim. (3.58) başlangıç koşullarını dikkate alarak (3.59)'ü iki kez ardı ardına integre edelim:

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \mu(t)dt + C_1, \quad y = \int_0^x (x-t)\mu(t)dt + C_1x + C_0 \quad (3.60)$$

buluruz. Bu sonuca ulaşabilmek için şu bağıntıdan yararlandık:

$$\underbrace{\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \dots \int_{x_0}^x}_{n} f(x)dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-z)^{n-1} f(z)dz$$

(3.59) ve (3.60)'ı dikkate alarak (3.57) diferansiyel denklemini

$$\begin{aligned} \mu(x) + \int_0^x a_1(x)\mu(t)dt + C_1a_1(x) + \int_0^x a_2(x)(x-t)\mu(t)dt + C_1xa_2(x) + C_0a_2x \\ = F(x) \end{aligned}$$

formunda veya

$$\mu(x) + \int_0^x [a_1(x) + a_2(x)(x-t)]\mu(t)dt = F(x) - C_1a_1(x) - C_1xa_2(x) - C_0a_2(x) \quad (3.61)$$

yazabiliriz. Eğer

$$K(x, t) = -[a_1(x) + a_2(x)(x-t)] \quad (3.62)$$

$$f(x) = F(x) - C_1a_1(x) - C_1xa_2(x) - C_0a_2(x) \quad (3.63)$$

dersek (3.61) denklği şu hale gelir.

$$\mu(x) = \int_0^x K(x, t)\mu(t)dt + f(x) \quad (3.64)$$

Bu ise ikinci çeşit bir Volterra integral denklemdir.

(3.64) denkleminin varlığının ve tekliğinin kaynağını, katsayıları $x = 0$ noktası civarında sürekli olan bir lineer diferansiyel denklem için (3.57) ve (3.58) ile verilen Cauchy probleminin bir tek çözümünün var olması gerçeği oluşturur.

Aksi de doğrudur: K ve f i (3.62) ve (3.63) ile belirledikten sonra (3.48) integral denklemini çözer ve $\mu(x)$ için elde edilen ifadeyi (3.60) ün ikinci denkleminde yerine korsak (3.57) denkleminin (3.58) başlangıç koşullarını gerçekleyen biricik çözümünü elde ederiz.

Örnek: Aşağıda başlangıç değerleri ile verilen diferansiyel denklemi, bir integral denklemine dönüştürelim:

$$y'' + 2xy' + 3x^2y = 0 \quad (3.65)$$

$$y(0) = 1, y'(0) = -1 \quad (3.66)$$

Çözüm:

Burada

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mu(x) \quad (3.67)$$

yazılır, iki kez integral alınır ise

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \mu(t)dt + y'(0), \quad y = \int_0^x (x-t)\mu(t)dt - x + 1 \quad (3.68)$$

(3.67) ve (3.68) 'i (3.65) te verilen diferansiyel denklemde yerine yazılırsa,

$$\mu(x) + \int_0^x 2x\mu(t)dt + (-1)2x + \int_0^x 3x^2(x-t)\mu(t)dt + 3x^2(-x+1) = 0 \quad (3.69)$$

$$\mu(x) = 3x^3 - 3x^2 + 2x - \int_0^x (2x + 3x^2(x-t))\mu(t)dt \quad (3.70)$$

elde edilir.

3.5. Laplace Dönüşüm Metodu ile Rastgele Volterra İntegral Denkleminin Çözüm Davranışı

Volterra integral denklemleri gibi denklemler

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x-t)u(t)dt \quad (3.71)$$

çekirdek denkleminin laplace dönüşüm metodu ile çözülebilir. Çözümü başlatmak için öncelikle $u(x)$ 'in laplace dönüşümü tanımlanır.

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} u(x) dx. \quad (3.72)$$

Çekirdek integralinin laplace dönüşümü kullanılarak

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x K(x-t)u(t)dt\right\} = \mathcal{L}\{K(x)\}\mathcal{L}\{u(x)\} \quad (3.73)$$

Böylece (3.71) denkleminin laplace dönüşümünü alarak denklemini elde ederiz.

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = \mathcal{L}\{f(x)\} + \lambda \mathcal{L}\{K(x)\}\mathcal{L}\{u(x)\} \quad (3.74)$$

ve $\mathcal{L}\{u(x)\}$ için çözüm şu şekilde olur.

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = \frac{\mathcal{L}\{f(x)\}}{1-\lambda \mathcal{L}\{K(x)\}}, \quad (3.75)$$

Elde ettiğimiz dönüşümün tersini alırsak

$$u(x) = \int_0^x \psi(x-t)f(t)dt \quad (3.76)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{1-\lambda \mathcal{L}\{K(x)\}}\right\} = \psi(x). \quad (3.77)$$

İfadesi ikinci tür volterra integral denklemlerinin çözümüdür (Wazwaz, 1999).

$$\textbf{Örnek 3.13: } u(x) = A - Ax - \int_0^x (t-x) u(t) dt, \quad (3.78)$$

$u(0) = 0$ burada A normal dağılıma sahip rastgele değişken $A \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 1)$ olmak üzere 2. tip rastgele volterra integral denkleminin çözüm davranışlarını Laplace Dönüşüm yöntemiyle elde ediniz.

Çözüm:

Yukarıdaki denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u(x)\} &= \mathcal{L}\{A - Ax\} + \mathcal{L}\{x\}\mathcal{L}\{u(x)\} \\ &= \frac{A}{s} - \frac{A}{s^2} + \frac{1}{s^2} \mathcal{L}\{u(x)\} \end{aligned} \quad (3.79)$$

Buradan, $\mathcal{L}\{u(x)\} = \frac{As-A}{s^2-1} = \frac{A}{s+1}$ ve Ters Laplace dönüşümünden $u(x) = Ae^{-x}$ elde edilir.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ parametreleri ile normal dağılmış rastgele bir X değişkeni için, momentlerin normal dağılımın moment çıkaran fonksiyonu ile elde edilebileceği bilinmektedir.

$M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)}$ buradan 2. Momenti ve varyansını hesaplayalım.

$$E[X] = \mu, E[X^2] = \mu^2 + \sigma^2, Var[X] = \sigma^2.$$

bu sonuçları kullanarak beklenen değer;

$$E(u(x)) = E(A)e^{-x},$$

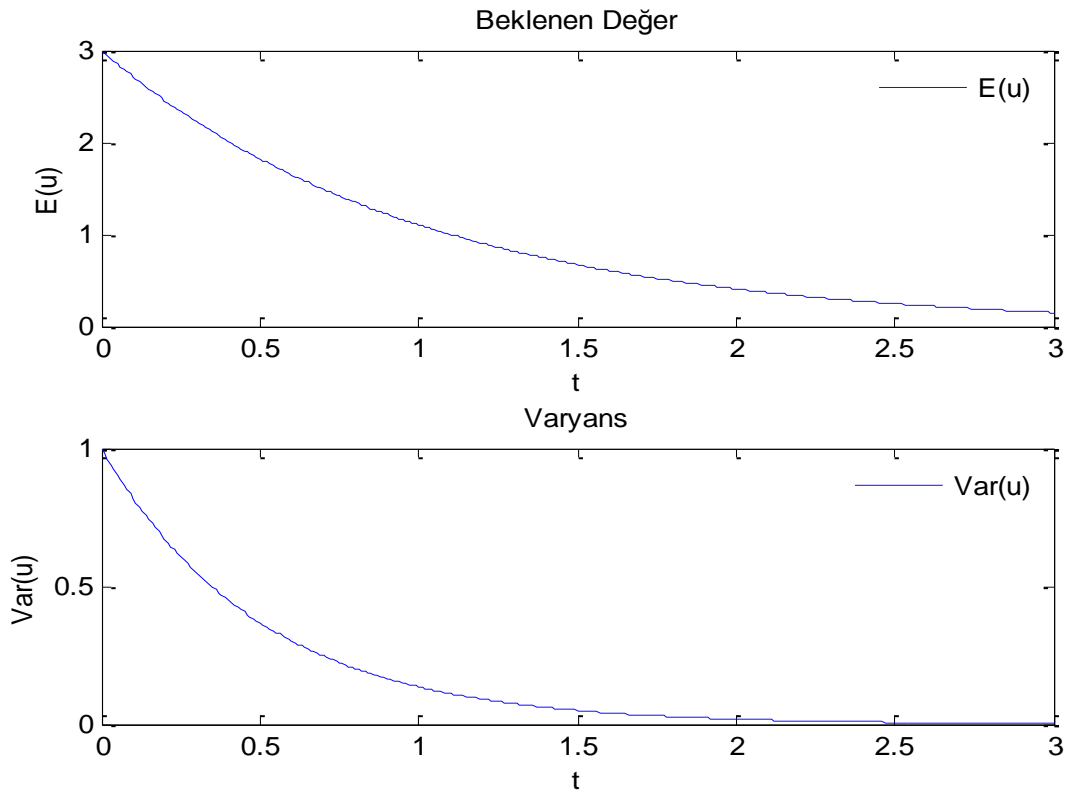
varyansı;

$$Var(u(x)) = E(u(x)^2) - E(u(x))^2 = Var(A)e^{-2x}$$

$\mu = 3, \sigma^2 = 1$ özel değerleri için beklenen değer ve varyansını bulup grafiklerini çizelim.

$$E(u(x)) = \mu e^{-x} = 3e^{-x}$$

$$Var(u(x)) = Var(A)e^{-2x} = \sigma^2 e^{-2x} = e^{-2x}$$



Şekil 3. 13. Rastgele laplace dönüşüm yöntemi ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri

Örnek 3.14: $u(x) = \cos x - A - Ax - 1 + \int_0^x (t - x) u(t) dt,$ (3.80)

$u(0) = -A$ burada A Beta dağılımına sahip rastgele değişken $A, C \sim \text{Beta}(\alpha = 4, \beta = 3)$ olmak üzere 2. tip rastgele volterra integral denkleminin çözüm davranışlarını Laplace Dönüşüm yöntemiyle elde ediniz.

Çözüm:

(3.80) denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u(x)\} &= \mathcal{L}\{\cos x - A - Ax - 1\} + \mathcal{L}\{x\}\mathcal{L}\{u(x)\} \\ &= \frac{s}{s^2+1} - \frac{A+1}{s} - \frac{A}{s^2} - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}\{u(x)\} \end{aligned} \quad (3.81)$$

Buradan, $\mathcal{L}\{u(x)\} = \frac{-A[s^3+s^2+s+1]-s}{(s^2+1)^2}$ ve Ters Laplace dönüşümünden $u(x) = -A\cos(x) - A\sin(x) - \frac{x}{2}\sin(x)$ elde edilir.

$X \sim B(\alpha, \beta)$ parametrelerine sahip bir beta rastgele değişken için, momentler beta dağılımının moment çıkaran fonksiyonu aracılığıyla elde edilebileceği bilinmektedir.

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{r=0}^{k-1} \frac{\alpha+r}{\alpha+\beta+r} \right) t^k / k! \quad (3.82)$$

Böylece 1. Moment ,2.moment ve varyansı aşağıdaki gibidir.

$$E[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, E[X^2] = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)} \text{ ve } Var[X] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \quad (3.83)$$

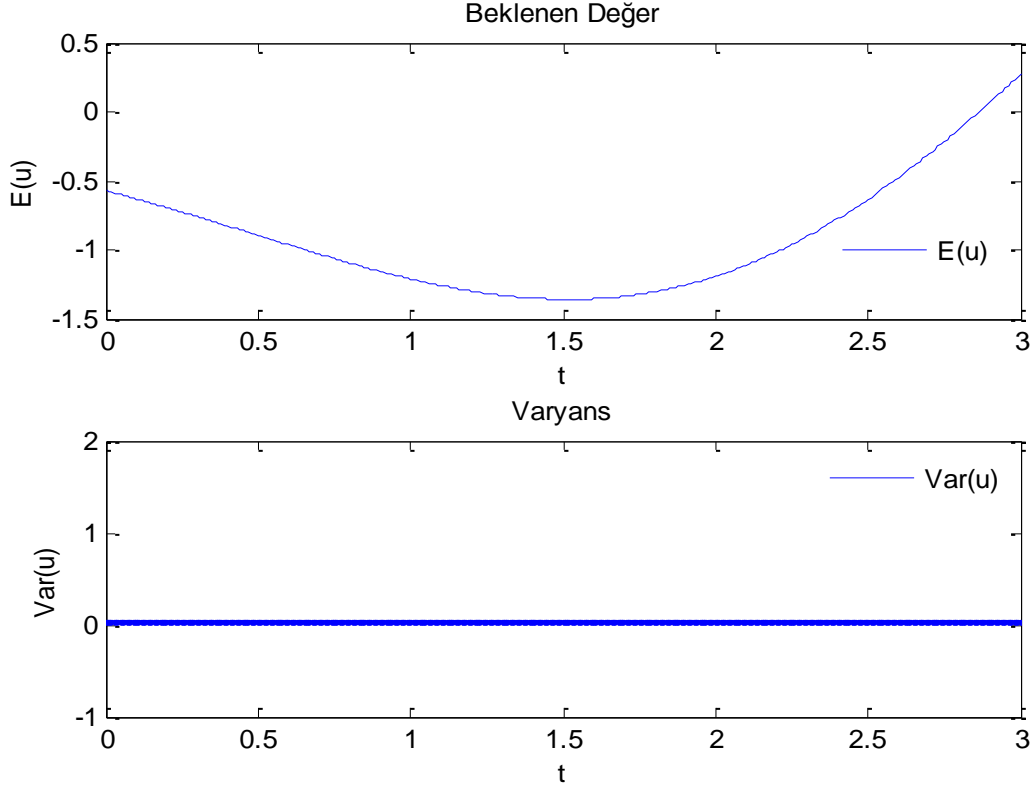
Bu momentler ve bağımsız rastgele değişken X ve Y için $E[XY] = E[X] E[Y]$ olduğu için, beklenen değer ve varyans için yaklaşık formüller hesaplanabilir.

$$E(u(x)) = -E(A)\cos(x) - E(A)\sin(x) - \frac{x}{2}\sin(x) \quad (3.84)$$

$$Var(u(x)) = E(u(x)^2) - E(u(x))^2 = Var(A)\cos(x)^2 + Var(A)\sin(x)^2 \quad (3.85)$$

$$\alpha = 4 \text{ ve } \beta = 3, \text{ parametreleri için } A, C \sim \text{Beta}(\alpha = 4, \beta = 3), E(u(x)) = -\frac{4}{7} \cos(x) - \frac{4}{7} \sin(x) - \frac{x}{2} \sin(x), \text{Var}(u(x)) = \frac{3}{98} \cos(x)^2 + \frac{3}{98} \sin(x)^2 = \frac{3}{98} \quad (3.86)$$

olarak bulunur.



Şekil 3.14. Rastgele laplace dönüşüm yöntemi ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri

$$\textbf{Örnek 3.15. } u''(x) = A + \int_0^x (x-t) u(t) dt, \quad (3.87)$$

$u(0) = A, u'(0) = 0$ burada A Gamma dağılımına sahip rastgele değişken $A \sim \text{Gamma}(\alpha = 4, \beta = 2)$, olmak üzere Volterra-integro diferansiyel denkleminin çözüm davranışlarını Laplace Dönüşüm yöntemiyle elde ediniz.

Çözüm:

(3.87) denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınırsa

$$\mathcal{L}\{u''(x)\} = \mathcal{L}\{A\} - \mathcal{L}\{x\}\mathcal{L}\{u(x)\}$$

$$s^2 \mathcal{L}\{u(x)\} - su(0) - u'(0) = \frac{A}{s} + \frac{1}{s^2} \mathcal{L}\{u(x)\} \quad (3.88)$$

Buradan, $\mathcal{L}\{u(x)\} = \frac{As}{s^2-1}$ ve Ters Laplace dönüşümünden $u(x) = A \cosh(x)$ elde edilir.

$X \sim G(\alpha, \beta)$ parametrelerine sahip bir gamma dağılımlı X değişkeni için, momentlerin gama dağılımının moment çıkaran fonksiyonu ile elde edilebileceği bilinmektedir

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{1}{(1 - \beta t)^\alpha}.$$

Böylece 1.moment ve rastgele değişkenin varyansı $X \sim G(\alpha, \beta)$ aşağıdaki gibidir:

$$E[X] = \alpha\beta, \text{Var}[X] = \alpha\beta^2.$$

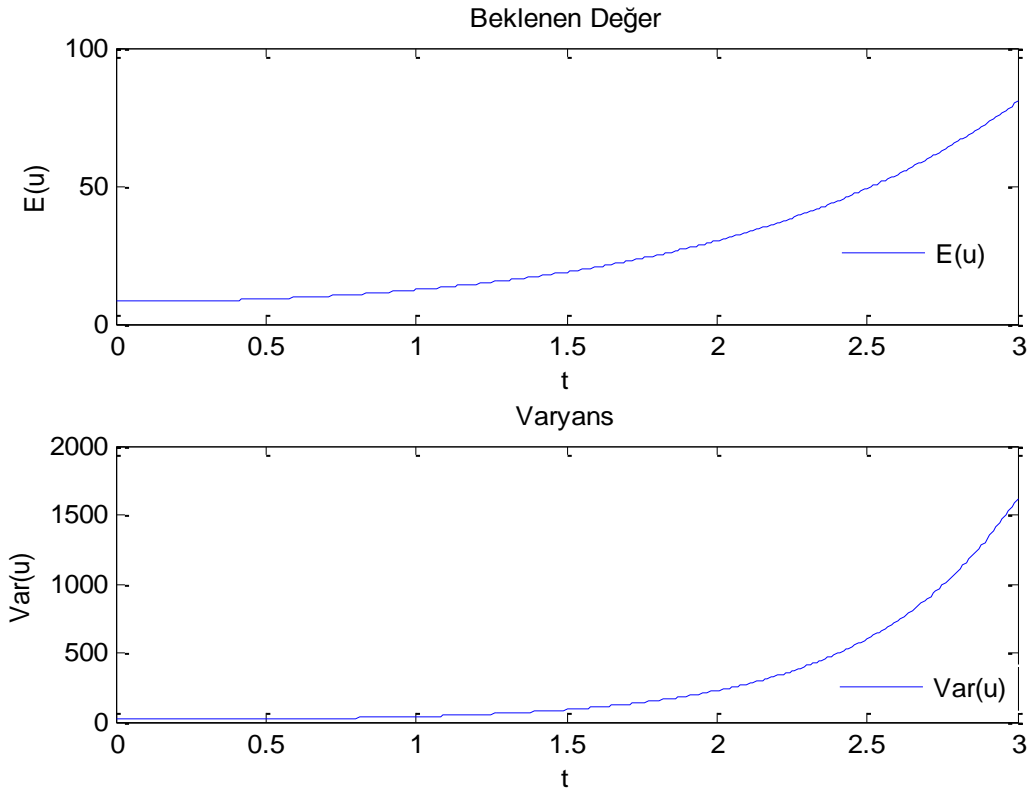
Bu momentler ve bağımsız rastgele değişkenler X ve Y için $E[XY] = E[X] E[Y]$ olduğu için, beklenen değer ve varyans için yaklaşık formüller hesaplanabilir.

$$E(u(x)) = E(A) \cosh(x) \quad (3.89)$$

$$\text{Var}(u(x)) = E(u(x)^2) - E(u(x))^2 = \text{Var}(A) \cosh(x)^2 \quad (3.90)$$

$$\alpha = 4 \text{ ve } \beta = 2 \text{ parametreleri için } A \sim \text{Gamma}(\alpha = 4, \beta = 2), E(u(x)) = 8 \cosh(x), \\ \text{Var}(u(x)) = 16 \cosh(x)^2 \quad (3.91)$$

olarak bulunur.



Şekil 3.15. Rastgele laplace dönüşüm yöntemi ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri

Örnek 3.16.

$$u''(x) + u(x) = Ax + B, u(0) = 0, u'(0) = 0 \quad (3.92)$$

$A \sim N(\mu = 4, \sigma^2 = 2)$ $B \sim \text{Üstel}(\lambda = 3)$ A normal ve B üstel dağılım olmak üzere Volterra-integro diferensiyel denkleminin çözüm davranışlarını Laplace Dönüşüm yöntemiyle elde ediniz.

Çözüm: (3.92) denkleminin integrali alınırsa;

$$u'(x) = \frac{Ax^2}{2} + Bx - \int_0^x u(t)dt, \quad u(0) = 0 \quad (3.93)$$

birinci dereceden volterra integral denklemine dönüşür. Bu denkleminde standart volterra denkleminde dönüştürmek için (3.77) denkleminin integralini alırsız.

$$u(x) = \frac{Ax^3}{6} + \frac{Bx^2}{2} - \int_0^x \int_0^x u(t)dt \quad (3.94)$$

$$u(x) = \frac{Ax^3}{6} + \frac{Bx^2}{2} - \int_0^x (x-t)u(t)dt \quad (3.95)$$

Elde edilen (3.95) denklemin laplace dönüşümü uygularız.

$$\mathcal{L}[u(x)] = \mathcal{L}\left\{\frac{Ax^3}{6}\right\} + \mathcal{L}\left\{\frac{Bx^2}{2}\right\} - \mathcal{L}\left\{\int_0^x (x-t)u(t)dt\right\} \quad (3.96)$$

$$\mathcal{L}[u(x)] = \frac{A}{6} \frac{3!}{s^4} + \frac{B}{2} \frac{2!}{s^3} - \mathcal{L}[x]\mathcal{L}[u(x)] \quad (3.97)$$

$$\mathcal{L}[u(x)] = \frac{A}{s^4} + \frac{B}{s^3} - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[u(x)] \quad (3.98)$$

$$\mathcal{L}[u(x)][1 + \frac{1}{s^2}] = \frac{A}{s^4} + \frac{B}{s^3} \quad (3.99)$$

$$\mathcal{L}[u(x)] = \frac{s^2}{s^2+1} \left[\frac{A}{s^4} + \frac{B}{s^3} \right] = \frac{A+Bs}{s^2(s^2+1)} \quad (3.100)$$

(3.100) denkleminin ters laplace dönüşümü alınır

$$u(x) = -B\cos t - A\sin t + At + B \quad (3.101)$$

denklemini elde ederiz.

(3.101) denklemin beklenen değer ve varyansını hesaplayalım.

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)}. \quad (3.102)$$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ rastgele değişkeninin birinci, ikinci momentleri ve varyansı

$$E[X] = \mu, E[X^2] = \mu^2 + \sigma^2 \text{ ve } Var[X] = \sigma^2 \quad (3.103)$$

bulunur. Momentler kullanılarak X ve Y bağımsız rastgele değişkenler için $E[XY] = E[X]E[Y]$ olur.

$$E(u(x)) = -E(B)\cos(x) - E(A)\sin(x) + E(A)x + E(B) \quad (3.104)$$

$$Var(u(x)) = E(u(x)^2) - E(u(x))^2 = Var(B)\cos^2(x) + Var(A)\sin^2(x) + Var(A)x^2 + Var(B) \quad (3.105)$$

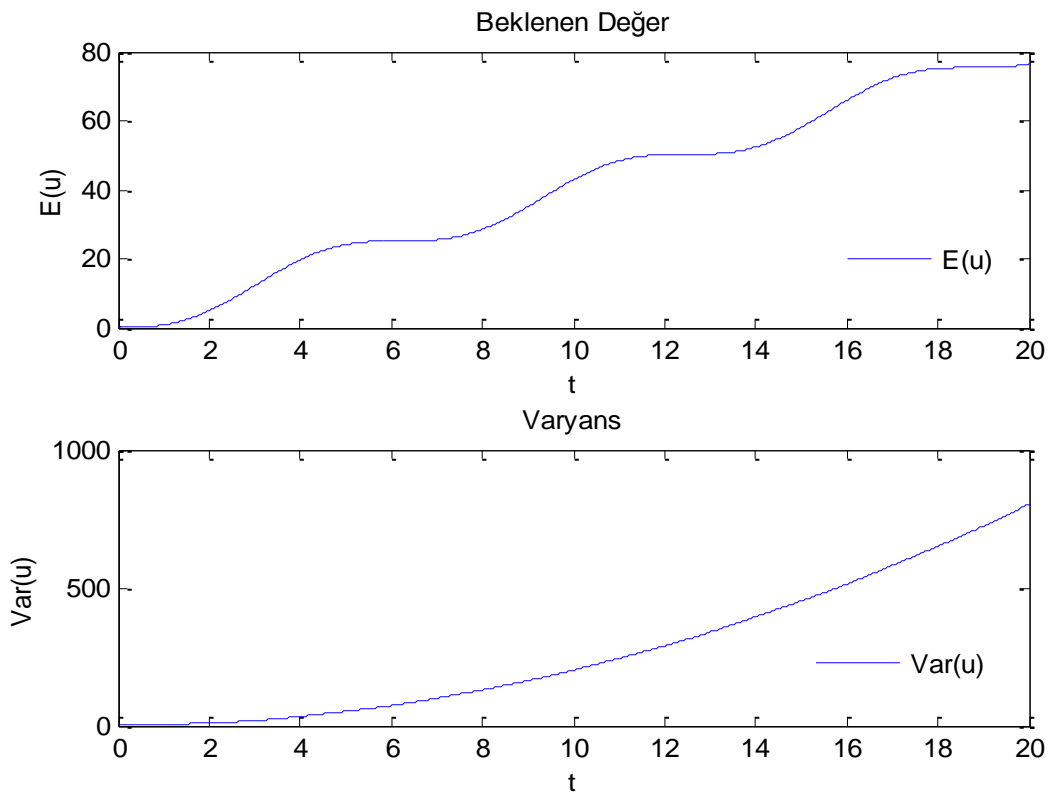
$\mu = 4, \sigma^2 = 2$, $A \sim N(\mu, \sigma^2)$ ve $\lambda = 3$, $B \sim \text{Üstel}(\lambda)$ özel değerleri için beklenen değer ve varyansını bulup grafiklerini çizelim

$$E(u(x)) = -E(B)\cos(x) - E(A)\sin(x) + E(A)x + E(B) = -\frac{1}{\lambda}\cos(x) - \mu\sin(x) + \mu x + \frac{1}{\lambda} = -\frac{1}{3}\cos(x) - 4\sin(x) + 4x + \frac{1}{3} ,$$

$$Var(u(x)) = Var(B)\cos^2(x) + Var(A)\sin^2(x) + Var(A)x^2 + Var(B) = E = \frac{1}{\lambda^2}\cos^2(x) + \sigma^2\sin^2(x) + \sigma^2x^2 + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{9}\cos^2(x) + 2\sin^2(x) + 2x^2 + \frac{1}{9}$$

(3.106)

olarak bulunur.



Şekil 3.16. Rastgele laplace dönüşüm yöntemi ile elde edilen beklenen değer ve varyans grafikleri

3.6. Direk Hesaplama Metodu

Direk hesaplama metodunun integral denklemlerde kullanımını incelemek için;

$$u(x) = f(x) + \int_a^b k(x, t)u(t)dt \quad (3.107)$$

Fredholm integral denklemi ele alınsın. Bu metot ile integral denklemin çözülebilmesi için çekirdek fonksiyonu

$$k(x, t) = \sum_{i=1}^n g_i(x)h_i(t) \quad (3.108)$$

şeklinde ayrılabilir yapıda olması gerekir. İlk olarak (3.108) denklemindeki çekirdek fonksiyonunu (3.107) denklemindeki fredholm integral denklemin yerine yazılırsa

$$u(x) = f(x) + g_1(x) \int_a^b h_1(t)u(t)dt + g_2(x) \int_a^b h_2(t)u(t)dt + \dots g_n(x) \int_a^b h_n(t)u(t)dt \quad (3.109)$$

İntegral denklemi elde edilir (Rahman, 2007). (3.109) integral denkleminde eşitliğin sağ tarafında yer alan sınırları sabit olan t'ye bağlı integrallerdir. Bu her integralin bir sabite eşit olduğu anlamına gelir. Buna göre (3.109) daki integral denklemi

$$u(x) = f(x) + \lambda a_1 g_1(x) + \lambda a_2 g_2(x) + \dots + \lambda a_n g_n(x) \quad (3.110)$$

Şeklinde ifade edilebilir.

$$a_j = \int_a^b h_j(t)u(t)dt, \quad 1 \leq j \leq n \quad (3.111)$$

(3.110) ifadesi (3.111) denkleminde yerine yazıldığında $a_j (1 \leq j \leq n)$ sabitlerini bulmak için çözülebilen n adet cebirsel denklemden oluşan bir sistem elde edilir. Buradan elde edilen a_j sayısal değerleri (3.110) denkleminde yerine yazılarak fredholm integral denkleminin çözümü olan $u(x)$ elde edilmiş olur.

Örnek 3.17.

$$u(x) = Ae^{-x} - \frac{A}{2} + \frac{A}{2}e^{-1} + \frac{1}{2} \int_0^1 u(t)dt \quad (3.112)$$

burada $A \sim \text{Üçgensel}(a, b, c)$ rastgele değişken olmak üzere verilen fredholm integral denkleminin çözüm davranışlarını inceleyiniz.

Çözüm: $\gamma = \int_0^1 u(t)dt$ seçilirse,

$$u(x) = Ae^{-x} - \frac{A}{2} + \frac{A}{2}e^{-1} + \frac{\gamma}{2} \quad (3.113)$$

elde edilir. (3.113)'ü (3.112) de yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
Ae^{-x} - \frac{A}{2} + \frac{A}{2}e^{-1} + \frac{\gamma}{2} \\
= Ae^{-x} - \frac{A}{2} + \frac{A}{2}e^{-1} \\
+ \frac{1}{2} \int_0^1 \left(Ae^{-t} - \frac{A}{2} + \frac{A}{2}e^{-1} + \frac{\gamma}{2} \right) dt
\end{aligned}$$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} [-Ae^{-t} + (-\frac{A}{2} + \frac{A}{2}e^{-1} + \frac{\gamma}{2})dt]$$

$$\frac{\gamma}{2} = -\frac{A}{2}e^{-1} + \frac{A}{2}$$

$$\gamma = -Ae^{-1} + A \quad (3.114)$$

(3.114) denklemini (3.113) te yerine yazarsak;

$$u(x) = Ae^{-x} \quad (3.115)$$

olarak bulunur.

(3.115) denklemin beklenen değer ve varyansını hesaplayalım.

$$E(X) = \frac{(a + b + c)}{3}, Var(X) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18}$$

ile verilir.

Üçgensel dağılımın moment çıkaran fonksiyonu;

$$M_x(t) = 2 \frac{(b - c)e^{at} - (b - a)e^{ct} + (c - a)e^{bt}}{(b - a)(c - a)(b - c)t^2}$$

$A \sim \text{Üçgensel}(a = 0, b = 2, c = 1)$ özel değerleri için

$$E(u(x)) = E(A)e^{-x},$$

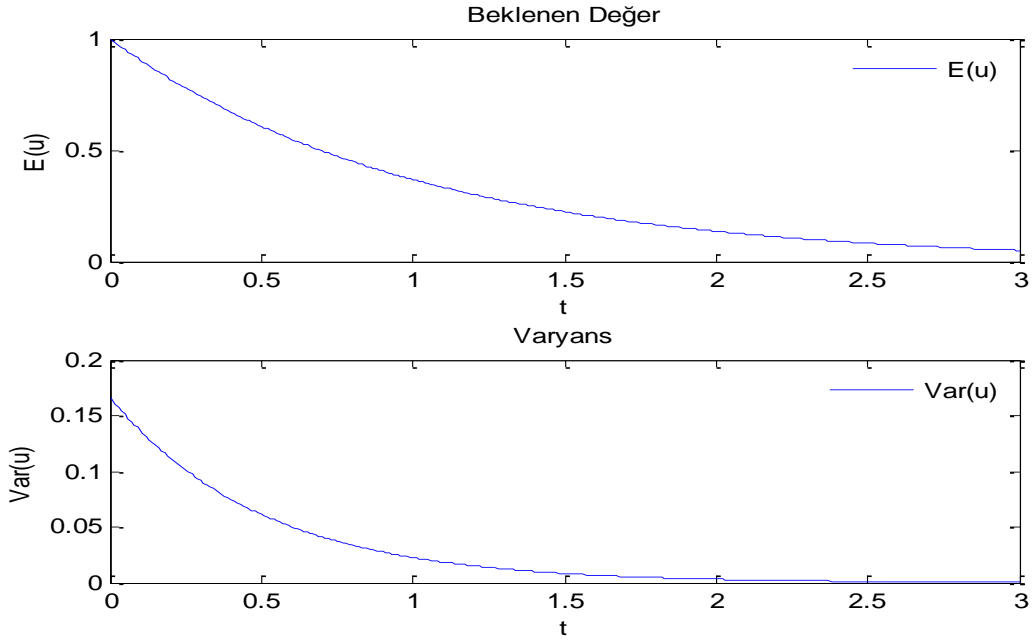
varyansı;

$$Var(u(x)) = E(u(x)^2) - E(u(x))^2 = Var(A)e^{-2x}$$

$a = 0, b = 2, c = 1$ özel değerleri için beklenen değer ve varyansını bulup grafiklerini çizelim.

$$E(u(x)) = \frac{(a + b + c)}{3} e^{-x} = e^{-x}$$

$$Var(u(x)) = Var(A)e^{2x} = \left[\frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18} \right] e^{-2x} = \frac{1}{6} e^{-2x}$$



Şekil 3.17. Direkt hesaplama yöntemi ile elde edilen çözümlerin beklenen değer ve varyans grafikleri

Örnek 3.18.

$$u(x) = A \cos(x) + Ax - x \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t) dt \quad (3.116)$$

$A \sim N(\mu, \sigma^2)$ rastgele değişken olmak üzere verilen fredholm integral denkleminin davranışlarını inceleyiniz.

Çözüm: $\gamma = \int_0^1 u(t) dt$ olsun.

$$u(x) = A \cos(x) + Ax - x\gamma \quad (3.117)$$

(3.117) denklemini (3.116) da yerine yazarsak;

$$A\cos(x) + Ax - x\gamma = A\cos(x) + Ax - x \int_0^{\frac{\pi}{2}} (A\cos(t) + At - t\gamma) dt$$

$$\gamma = A \sin \frac{\pi}{2} + A \frac{\pi^2}{8} - \gamma \frac{\pi^2}{8}$$

$$\gamma = A$$

$$u(x) = A\cos x + Ax - x\gamma$$

$$u(x) = A\cos x \quad (3.118)$$

(3.118) denkleminin beklenen değer ve varyansını hesaplırsak;

$M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)}$ buradan 2. Momenti ve varyansını hesaplayalım.

$$E[X] = \mu, E[X^2] = \mu^2 + \sigma^2, Var[X] = \sigma^2.$$

bu sonuçları kullanarak beklenen değer;

$$E(u(x)) = E(A)\cos(x),$$

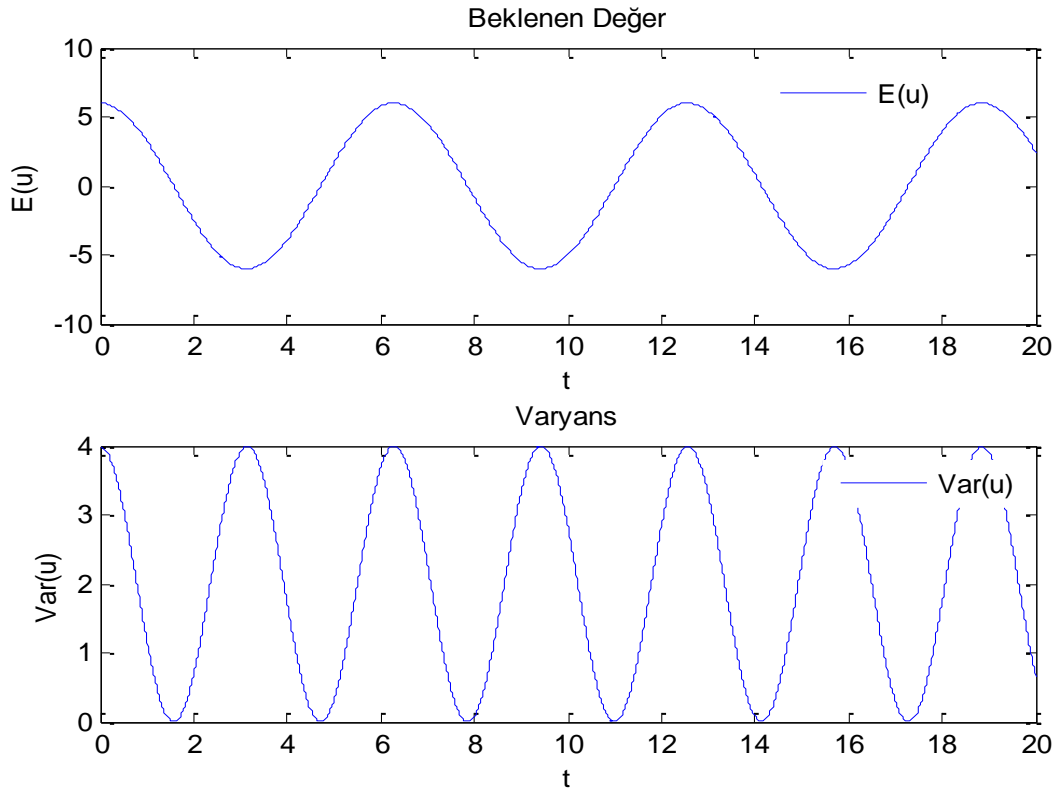
varyansı;

$$Var(u(x)) = E(u(x)^2) - E(u(x))^2 = Var(A) \cos^2(x)$$

$\mu = 6, \sigma^2 = 4$ özel değerleri için beklenen değer ve varyansını bulup grafiklerini çizelim.

$$E(u(x)) = \mu \cos(x) = 6 \cos(x),$$

$$Var(u(x)) = Var(A) \cos^2(x) = \sigma^2 \cos^2(x) = 4 \cos^2(x)$$



Şekil 3.18. Direkt hesaplama yöntemi ile elde edilen çözümlerin beklenen değer ve varyans grafikleri

3.7. Seri Çözüm Metodu

Bu metot çoğunlukla diferansiyel denklemler ve integral denklemlerde Taylor serilerine bağlı olarak kullanılan bir metottur.

SÇM'nin integral denklemlerde kullanımını incelemek için;

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)u(t)dt \quad (3.119)$$

İkinci tür volterra integral denklemi ele alınsın. $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonunun analitik fonksiyon olduğu düşünülürse bu fonksiyon;

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (3.120)$$

serisi ile ifade edilebilir. Bu seri incelenen ikinci tür Volterra integral denklem eşitliğinin her iki tarafında yerine yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = T(f(x)) + \lambda \int_0^x k(x, t) (\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n) dt \quad (3.121)$$

eşitliği elde edilir. (3.121) eşitliğinin her iki tarafındaki seriler açılırsa ;

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = T(f(x)) + \lambda \int_0^x k(x,t)(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots)dt \quad (3.122)$$

elde edilir (Rahman, 2007). Bu eşitlikte yer alan $T(f(x))$ ifadesi $f(x)$ fonksiyonunun Taylor serisidir.(3.121) veya (3.122)eşitliğinin sağ tarafında yer alan integral alınıp x in aynı kuvvetlerinin katsayıları bir araya getirildiğinde ve eşitliğin diğer tarafında yer alan aynı kuvvetlere sahip x in katsayıları ile eşitlendiğinde yineleme bağıntısı elde edilir. Elde edilen yineleme bağıntısı çözülerek a_n $n \geq 0$ katsayıları bulunur. Bulunan bu katsayılar (3.121) serisinde yerine yazıldığında integral denklemin bir çözümü varsa bu çözüm elde edilir.

Örnek 3.19.

$$u(x) = B + (A - B) \cos(x) + (A + B) \sin(x) - \int_0^x u(t)dt \quad (3.123)$$

$B \sim N(\mu, \sigma^2)$ ve $\lambda = 2$, $A \sim \text{Üstel}(\lambda)$ dağılıma sahip rastgele değişken olmak üzere verilen volterra integral denkleminin çözüm davranışlarını seri çözüm metoduyla inceleyiniz.

Çözüm:

$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şeklinde bir seri denklemini alalım. $\sin(x)$ ve $\cos(x)$ fonksiyonlarının Taylor seri açılımını (3.123) denkleminde yerine yazalım.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= B + (A - B) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (A + B) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &\quad - \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt \\ &= B + (A - B) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (A + B) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\ u(x) &= B + (A - B) \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) + (A + B) \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) - \\ &\quad [a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2!} + a_2 \frac{x^3}{3!} + a_3 \frac{x^4}{4!} + \dots] \\ a_0 &= A, a_1 = B, a_2 = \frac{-A}{2!}, a_3 = \frac{-B}{3!}, a_4 = \frac{A}{4!} \\ u(x) &= A \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right] + B \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right] \end{aligned}$$

$$u(x) = A\cos(x) + B\sin(x) \quad (3.124)$$

(3.124) denkleminin beklenen değer ve varyansını hesaplırsak;

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ rastgele değişkeninin birinci, ikinci momentleri ve varyansı

$$E[X] = \mu, E[X^2] = \mu^2 + \sigma^2 \text{ ve } Var[X] = \sigma^2 \quad (3.125)$$

bulunur. Momentler kullanılarak X ve Y bağımsız rastgele değişkenler için $E[XY] = E[X]E[Y]$ olur.

$$E(u(x)) = E(A)\cos(x) + E(B)\sin(x)$$

$$Var(u(x)) = E(u(x)^2) - E(u(x))^2 = Var(A)\cos^2(x) + Var(B)\sin^2(x) \quad (3.126)$$

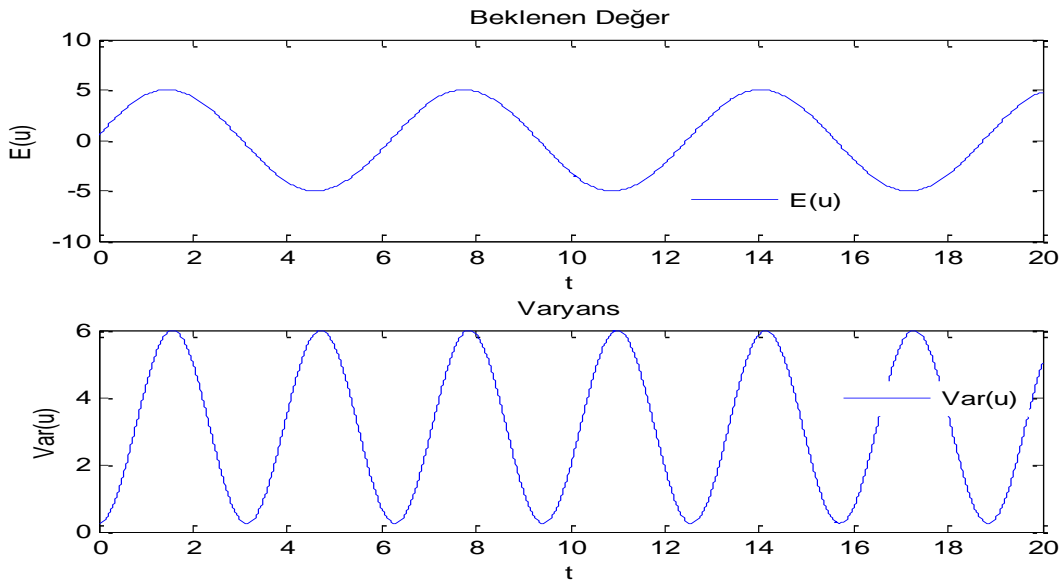
$\mu = 5, \sigma^2 = 6, B \sim N(\mu, \sigma^2)$ ve $\lambda = 2, A \sim \text{Üstel}(\lambda)$ özel değerleri için beklenen değer ve varyansını bulup grafiklerini çizelim

$$E(u(x)) = E(A)\cos(x) + E(B)\sin(x) = \frac{1}{\lambda}\cos(x) + \mu\sin(x) = \frac{1}{2}\cos(x) + 5\sin(x)$$

$$Var(u(x)) = Var(A)\cos^2(x) + Var(B)\sin^2(x) = \frac{1}{\lambda^2}\cos^2(x) + \sigma^2\sin^2(x) =$$

$$\frac{1}{4}\cos^2(x) + 6\sin^2(x) \quad (3.127)$$

olarak bulunur.



Şekil 3.19. Seri çözüm metodu yöntemi ile elde edilen çözümlerin beklenen değer ve varyans grafikleri

Örnek 3.20.

$$u''(x) = A \sinh(x) + \frac{Ax}{2} - \frac{1}{4}A \sinh(2x) + \int_0^x \sinh(t)u(t)dt, u(0) = 0, u'(0) = A, \quad (3.128)$$

$A \sim \text{Üçgensel}(a, b, c)$ rastgele değişken olmak üzere verilen volterra-integro integral denkleminin çözüm davranışlarını inceleyiniz.

Çözüm:

$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şeklinde bir seri denklemini alalım. $\sinh(x)$ ve $\sinh(2x)$ fonksiyonlarının Taylor seri açılımını (3.128) denkleminde yerine yazalım.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{Ax}{2} - \frac{A}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt$$

$$\begin{aligned} & 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \dots \\ &= A \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \right) + \frac{Ax}{2} \\ & - \frac{A}{4} \left(2x + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + \frac{(2x)^7}{7!} + \dots \right) \\ & + \int_0^x \left(t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^7}{7!} + \dots \right) (At + a_2t^2 + a_3t^3 + \dots) dt, a_0 = 0, a_1 \\ &= A, a_2 = 0, a_3 = \frac{A}{3!}, a_4 = 0, a_5 = \frac{A}{5!}, \dots \\ & u(x) = A \left[x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right] \end{aligned}$$

$$u(x) = A \sinh(x) \quad (3.129)$$

(3.129) denkleminin beklenen değer ve varyansını hesaplırsak;

$$E(X) = \frac{(a+b+c)}{3}, Var(X) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18}$$

ile verilir.

Üçgensel dağılımın moment çıkaran fonksiyonu;

$$M_x(t) = 2 \frac{(b-c)e^{at} - (b-a)e^{ct} + (c-a)e^{bt}}{(b-a)(c-a)(b-c)t^2}$$

$A \sim \text{Üçgensel}(a=0, b=4, c=2)$ özel değerleri için

$$E(u(x)) = E(A) \sinh(x),$$

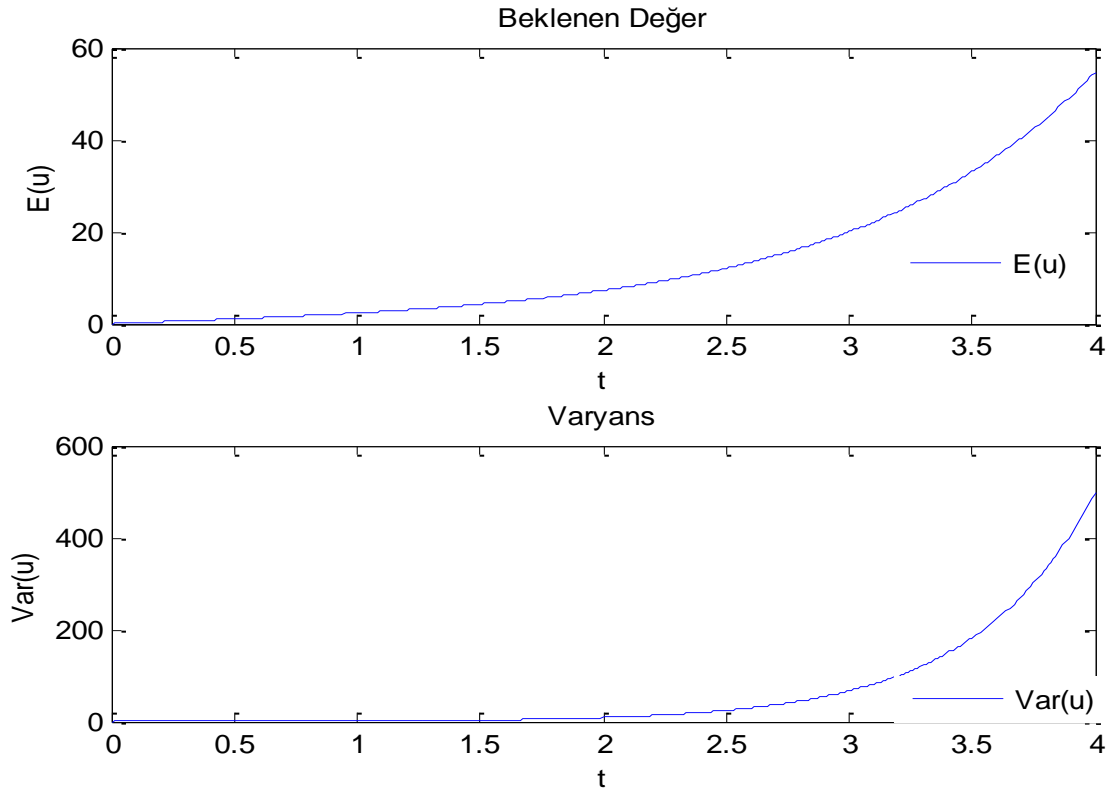
varyansı;

$$\text{Var}(u(x)) = E(u(x)^2) - E(u(x))^2 = \text{Var}(A) \sinh^2(x)$$

$a=0, b=4, c=2$ özel değerleri için beklenen değer ve varyansını bulup grafiklerini çizelim.

$$E(u(x)) = \frac{(a+b+c)}{3} \sinh(x) = 2 \sinh(x)$$

$$\text{Var}(u(x)) = \text{Var}(A) e^{2x} = \left[\frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18} \right] \sinh^2(x) = \frac{2}{3} \sinh^2(x)$$



Şekil 3.20. Seri çözüm metodu yöntemi ile elde edilen çözümlerin beklenen değer ve varyans grafikleri

4. BULGULAR

Bu tez çalışması kapsamında, rastgele efektli volterra integral denklemi, fredholm integral denklemi ve volterra-integro integral denklemlerinin çözümleri Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (DDY), Sumudu Dönüşüm Yöntemi (SDY), Elzaki Dönüşüm Yöntemi (EDY), Laplace Dönüşüm Yöntemi (LDY), Varyasyon İterasyon Metodu (VİM), Direk Hesaplama Metodu (DHM), Seri Çözüm Metodu (SÇM) gibi yaklaşık analitik çözüm yöntemleri yardımıyla elde edilmiştir. Elde edilen Rastgele İntegral denklemlerin Beta, Gama, Düzgün, Normal, Üstel ve Üçgensel dağılımlar yardımı ile olasılık karakteristikleri incelenmiştir. Ayrıca elde edilen çözümlerin beklenen değer ve varyansları hesaplanmıştır. Beklenen değer ve varyansı hesaplanan denklemlerin grafikleri Matlab paket programı yardımıyla çizdirilmiştir.

5. İRDELEME

Yapılan çalışmada rastgele katsayılı fredholm ve volterra integral denklemler literatürde en çok kullanılan DDY, SDY, EDY, LDY, VİM, DHM ve SÇM yöntemleriyle çözümleri elde edilmiştir. Farklı olasılık dağılımları seçilerek beklenen değer ve varyans çözümleri bulunmuş ve çözüm grafikleri Matlab paket programı yardımıyla çizilmiştir. Literatürde bu türden çalışmalar çok az yer almaktadır. Bu çalışmanın mevcut olan boşluğu dolduracağı ve bu alanda çalışmak isteyen araştırmacılara yol gösterici nitelik taşıdığını söyleyebiliriz.

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada rastgele katsayılı integral denklemler farklı metotlar yardımıyla incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

1. Rastgele etkili volterra integral denklemleri Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (DDY), Sumudu Dönüşüm Yöntemi (SDY), Elzaki Dönüşüm Yöntemi (EDY), Laplace Dönüşüm Yöntemi (LDY), Varyasyon İterasyon Metodu (VİM), Direk Hesaplama Metodu (DHM), Seri Çözüm Metodu (SÇM) gibi yöntemler kullanılarak çözülmüştür.
2. Rastgele etkili fredholm integral denklemleri Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (DDY), Sumudu Dönüşüm Yöntemi (SDY), Elzaki Dönüşüm Yöntemi (EDY), Laplace Dönüşüm Yöntemi (LDY), Varyasyon İterasyon Metodu (VİM), Direk Hesaplama Metodu (DHM), Seri Çözüm Metodu (SÇM) gibi yöntemler kullanılarak çözülmüştür.
3. Rastgele etkili volterra ve volterra-integro integral denklemlerinin elde edilen çözümlerinin olasılık karakterleri incelenmiştir.
4. Rastgele etkili fredholm integral denklemlerinin bulunan çözümlerinin olasılık karakterleri incelenmiştir.
5. Rastgele etkili volterra integral denklemlerinin bulunan çözümlerinin beklenen değer ve varyansları hesaplanarak Matlab paket programı yardımıyla grafikleri çizilmiştir.
6. Rastgele etkili fredholm integral denklemlerinin bulunan çözümlerinin beklenen değer ve varyansları hesaplanarak Matlab paket programı yardımıyla grafikleri çizilmiştir.

7. ÖNERİLER

Yapılan bu çalışma kapsamında rastgele volterra ve fredholm integral denklemlerinin çözümleri ile ilgili çalışmayı düşünen araştırmacılar için bazı öneriler aşağıdaki gibi sıralanmıştır.

1. Rastgele katsayılı volterra integral denklemleri için farklı olasılık dağılımlarından elde edilen çözüm davranışları incelenebilir.
2. Rastgele katsayılı fredholm integral denklemleri için farklı olasılık dağılımlarından elde edilen çözüm davranışları incelenebilir.
3. İki veya daha yüksek boyutlu integral denklemleri de rastgele hale dönüştürülerek olasılık karakteristikleri incelenebilir.

8. KAYNAKLAR

- Aksoy, Y., 1983. İntegral Denklemler, Yıldız Üniversitesi Yayınları, Cilt :1, Sayı166.
- Arikoğlu, A., ve Özkol, I., 2005. Solutions of boundary value problems for integro differential equations by using differential transform method, Appl Math Comput , 168,1145-1158.
- Arikoğlu, A., ve Özkol, I., 2008. Solution of integral and integro-differential equation systems by using differential transform method, Comput Math Appl , 56,2411-2417.
- Asiru, M. A., 2010. Sumudu transform and the solution of integral equations of convolution type, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology .
- Belgacem, F. B. M., Karaballi, A. A., Kalla, S. L., 2003. Analytical investigations of the Sumudu transform and applications to integral production equations, Math. Probl. Eng., 3, 103–118.
- Belgacem, F. B. M., 2010. Sumudu transform applications to Bessel functions and equations, Appl. Math. Sci., 4, 3665–3686.
- Bocher, M., 1913. An Introduction to The Study of Integral Equations. New York: Cambridge Universty Pres.
- Chiles, J., ve Delfiner, P., 1999. Geostatistics: Modelling Spatial Uncertainly. New York: john Wiley.
- Elzaki, T. M. ve Elzaki, S. M., 2014. On the Connections Between Laplace and Elzaki Transforms, Adv. Theor. Appl. Math, 6(1), 1-10.
- Elzaki, T. M., Elzaki S. M., ve Elnour, E. A., 2012. On the New Integral Transform “Elzaki Transform” Fundamental Properties Investigations and Applications, Glo. J. Math. Sci, 4 , 1-13.
- Elzaki, T. M., 2015. The Solution of Radial Diffusivity and Shock Wave Equations by Elzaki Variational Iteration Method, Int. J. Math. Analy, 9(22), 1065-1071.
- Evans, M., Hastings, N., ve Peacock, B. 1993. A Wiley interscience publication:. Newyork,toronto,Singapore,Chichester,Brisbane: Printed in the United States of America.
- Fakharzadeh, J., Hesamaeddini, E., ve Solemaniyareki, M., 2015. Multi-step Stochastic Differential Transformation Method for solving Some Class of Random Differential Equations. Applied Mathematics in Engineering, Management and Technology, 3(3), 115–123.
- Feller, W., 1968. An Introduction to Probability Theory and Its Applications volume 1,3rd edition, New York: John Wiley & Sons.

- He, J.H., 1998. Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 167 (1–2), 57–68.
- He, J.H., 1998. Approximate solution of nonlinear differential equations with convolution product nonlinearities, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 167 (1–2), 69–73.
- He, J.H., 1999. Variational iteration method—a kind of non-linear analytical technique: some examples, Internat. J. Nonlinear Mech., 34 (4), 699–708.
- Khalaf, S.L., 2011. Mean Square Solutions of Second-Order Random Differential Equations by Using Homotopy Perturbation Method. International Mathematical Forum, 6, 2361-2370.
- Khudair, A. R. , Haddad, S. A.M. ve Khalaf, S. L., 2016. Mean Square Solutions of Second-Order Random Differential Equations by Using the Differential Transformation Method, Open Journal of Applied Sciences, 6, 287-297.
- Khudair, A.R., Ameen, A.A. ve Khalaf, S.L., 2011. Mean Square Solutions of Second-Order Random Differential Equations by Using Variational Iteration Method. Applied Mathematical Sciences, 5, 2505-2519.
- Kythe, P. ve Puri, P., 2011. Computational methods for linear integral equations. Springer Science & Business Media.
- Lovitt, W., 1924. Linear Integral Equations. McGraw-Hill, New York: new edition s.d.
- Merdan, M., Anac, H., Bekiryazici, Z. ve Kesemen, T. 2019. Solving of Some Random Partial Differential Equations by Using Differential Transformation Method and Laplace-Padé Method, Gumushane Universitesi Fen Bilimleri Enstitusu Dergisi, 9(1), 108-118.
- Merdan, M., Altay, Ö. ve Bekiryazici, Z. 2020. Investigation of the Behaviour of Volterra Integral Equations with Random Effects, Gumushane Universitesi Fen Bilimleri Enstitusu Dergisi, 10(1), 205-216.
- Mohyud-Din, S. T., Yildirim, A. ve Gülkanat, Y., 2010. Analytical solution of Volterra's population model, J. King Saud Univ. - Sci., 22(4), 247–250.
- Petrovsky, I., 1953. Lectures on the theory of Integral Equations. Würzburg.
- Rahman, M., 2007. Integral Equations and their Applications. Canada: Witt Press.
- Rahman, M., 2007. Integral Equations and Their Applications. Canada: Witt Pres.
- Soong, T.T., 1973. Random Differential Equations in Science And Engineering. Academic Press, New York.
- Tricomi, F., 1955. Integral Equations. Italy: University of Turin.
- Wazwaz, A., 1999. Analytical approximations and Pade approximants for Volterra's populations Model, Appl.Math.Comput., 100(1), 13-25.

- Wazwaz, A., M., 2011. Linear and nonlinear integral equations (Vol. 639). Heidelberg: Springer.
- Wazwaz, A.M., 1997. A First Course in In Integral Equations, World Scientific: Singapore.
- Watugala, G., 1993. Sumudu transform:a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems. Internat J. Math. Ed.Sci. Tech,1, 35-43.
- Watugala, G. K.,1998 Sumudu transform new integral transform to solve differential equations and control engineering problems, Math. Engrg. Ind., 6(4), 319–329.
- Villafuerte, L., Braumann, C.A., Cortés, J.C. ve Jódar, L., 2010. Random Differential Operational Calculus: Theory And Applications, Computers & Mathematics With Applications, 59, 115-125.

ÖZGEÇMİŞ

İlkokulu ve ortaokulu Mustafa Maruf Şahin İlköğretim okulunda, liseyi Kelkit Lisesinde okudu.2008 yılında Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2013 yılında aynı bölümden mezun oldu. 2017 yılında Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Matematik Mühendisliği alanında Yüksek Lisansa başlamıştır. 2013 yılından beri özel eğitim kurumlarında çalışmaktadır.